Analyse Numérique SV

Systèmes Linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

Convergence : conditions suffisantes

La méthode de Richardson Préconditionnée

Richardson : choix de α_k

La méthode de Richardson non-préconditionnée

Si $P = I$ et A est symétrique définie positive, on trouve les méthodes :

- de Richardson stationnaire si on choisit :

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}. \tag{3}$$

- du gradient si :

$$\alpha_k = \frac{(\mathrm{r}^{(k)})^T \mathrm{r}^{(k)}}{(\mathrm{r}^{(k)})^T A \mathrm{r}^{(k)}}, \qquad k \geq 0. \tag{4}$$

Algorithme du Gradient préconditionné

On peut réécrire plus efficacement la méthode du gradient préconditionné de la manière suivante : soit $\mathrm{x}^{(0)}$, poser $\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)}$, puis pour $k \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
P\mathrm{z}^{(k)} &= \mathrm{r}^{(k)} \\
\alpha_k &= \frac{(\mathrm{z}^{(k)})^T \mathrm{r}^{(k)}}{(\mathrm{z}^{(k)})^T A\mathrm{z}^{(k)}} \\
\mathrm{x}^{(k+1)} &= \mathrm{x}^{(k)} + \alpha_k \mathrm{z}^{(k)} \\
\mathrm{r}^{(k+1)} &= \mathrm{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathrm{z}^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Convergence de la méth. de Richardson

Considérons tout d'abord les méthodes de Richardson stationnaires ; on a le résultat de convergence suivant :

Théorème (Cas stationnaire)

On suppose la matrice P inversible et les valeurs propres de $P^{-1}A$ strictement positives et telles que $\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n = \lambda_{min} > 0$. Alors la méthode de Richardson stationnaire est convergente si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. De plus, le rayon spectral de la matrice d'itération R_α est minimal si $\alpha = \alpha_{opt}$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}},$$

avec

$$\rho_{opt} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

Dans le cas dynamique, on a un résultat qui permet de choisir de façon optimale le paramètre d'accélération à chaque étape, si la matrice A est symétrique définie positive :

Théorème (Cas dynamique)

Si A est symétrique définie positive, le choix optimal de α_k est donné par

$$\alpha_k = \frac{(\mathrm{r}^{(k)}, \mathrm{z}^{(k)})}{(A\mathrm{z}^{(k)}, \mathrm{z}^{(k)})}, \qquad k \geq 0 \tag{5}$$

où

$$\mathrm{z}^{(k)} = P^{-1}\mathrm{r}^{(k)}. \tag{6}$$

Pour le cas stationnaire et pour le cas dynamique on peut démontrer que, si A et P sont symétriques définies positives, la suite $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ donnée par la méthode de Richardson (stationnaire et dynamique) converge vers x lorsque $k \to \infty$, et

$$\boxed{\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1}\right)^k \|\mathrm{x}^{(0)} - \mathrm{x}\|_A, \quad k \geq 0,} \tag{7}$$

où $\|\mathrm{v}\|_A = \sqrt{\mathrm{v}^T A \mathrm{v}}$ et $K(P^{-1}A)$ est le conditionnement de la matrice $P^{-1}A$:

$$K(C) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(C^T C)}{\lambda_{\min}(C^T C)}}$$

Remarque. Dans le cas de la méthode du gradient ou de Richardson stationnaire l'estimation de l'erreur devient

$$\boxed{\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_A \leq \left(\frac{K(A)-1}{K(A)+1}\right)^k \|\mathrm{x}^{(0)} - \mathrm{x}\|_A, \quad k \geq 0.} \tag{8}$$

Remarque. Si A et P sont symétriques définies positives, on a

$$K(P^{-1}A) = \frac{\lambda_{max}(P^{-1}A)}{\lambda_{min}(P^{-1}A)}.$$

La méthode du gradient conjugué

Une méthode encore plus rapide dans le cas où P et A sont symétriques définies positives est celle du *gradient conjugué préconditionné* qui s'exprime ainsi :
soit $\mathrm{x}^{(0)}$ une donnée initiale ; on calcule $\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)}$, $\mathrm{z}^{(0)} = P^{-1}\mathrm{r}^{(0)}$, $\mathrm{p}^{(0)} = \mathrm{z}^{(0)}$, puis pour $k \geq 0$,

$$\boxed{\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\mathrm{p}^{(k)T}\mathrm{r}^{(k)}}{\mathrm{p}^{(k)T}A\mathrm{p}^{(k)}} \\
\mathrm{x}^{(k+1)} &= \mathrm{x}^{(k)} + \alpha_k \mathrm{p}^{(k)} \\
\mathrm{r}^{(k+1)} &= \mathrm{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathrm{p}^{(k)} \\
P\mathrm{z}^{(k+1)} &= \mathrm{r}^{(k+1)} \\
\beta_k &= \frac{\left(A\mathrm{p}^{(k)}\right)^T \mathrm{z}^{(k+1)}}{\left(A\mathrm{p}^{(k)}\right)^T \mathrm{p}^{(k)}} \\
\mathrm{p}^{(k+1)} &= \mathrm{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathrm{p}^{(k)}\,.
\end{aligned}}$$

Dans ce cas, l'estimation de l'erreur est donnée par

$$\boxed{\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1+c^{2k}} \|\mathrm{x}^{(0)} - \mathrm{x}\|_A\,, \quad k \geq 0} \text{ où } \boxed{c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)}-1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)}+1}}\,. \qquad (9)$$