

ANALYSE NUMÉRIQUE SV

SYSTÈMES LINÉAIRES

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021



FORMULATION DU PROBLÈME

On appelle **système linéaire d'ordre n** (n entier positif), une expression de la forme

$$Ax = b,$$

où $A = (a_{ij})$ est **une matrice** de taille $n \times n$ **donnée**, $b = (b_j)$ est un **vecteur** colonne également **donné** et $x = (x_j)$ est le **vecteur des inconnues** du système. La relation précédente équivaut aux n équations

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

La matrice A est dite **régulière (non singulière)** si $\det(A) \neq 0$. On a **l'existence et l'unicité** de la solution x (pour n'importe quel vecteur b donné) si et seulement si la matrice associée au système linéaire est régulière.

SOMMAIRE MÉTHODES ITÉRATIVES

- Méthodes itératives : définitions
- Méthode de Richardson
- Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel
Critères de convergence
- Méthodes du Gradient et du Gradient Conjugués
Critères de convergence

MÉTHODES ITÉRATIVES

Résoudre un système linéaire $Ax = b$ par une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs $x^{(k)}$, $k \geq 0$, de \mathbb{R}^n qui converge vers la solution exacte x , c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$$

pour n'importe quelle donnée initiale $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

On peut considérer la relation de récurrence suivante :

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad k \geq 0 \tag{1}$$

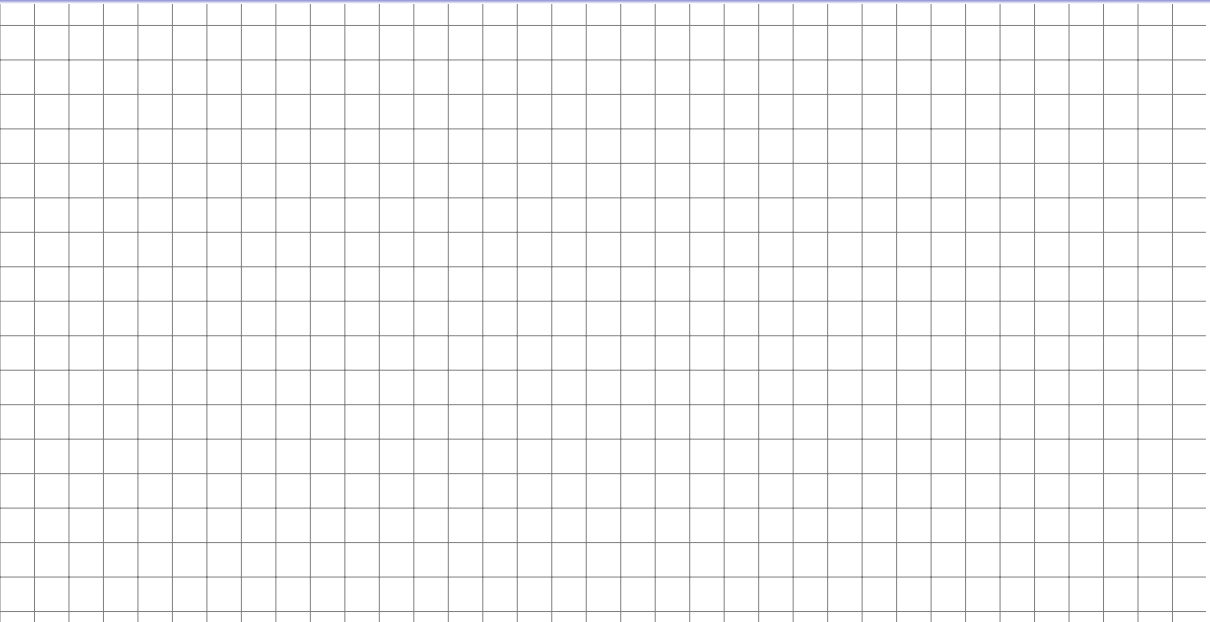
où B est une matrice bien choisie (dépendante de A) et g est un vecteur (dépendant de A et de b), qui vérifient la relation (de consistance)

$$x = Bx + g. \tag{2}$$

CONSTRUCTION D'UNE MÉTHODES ITÉRATIVE I



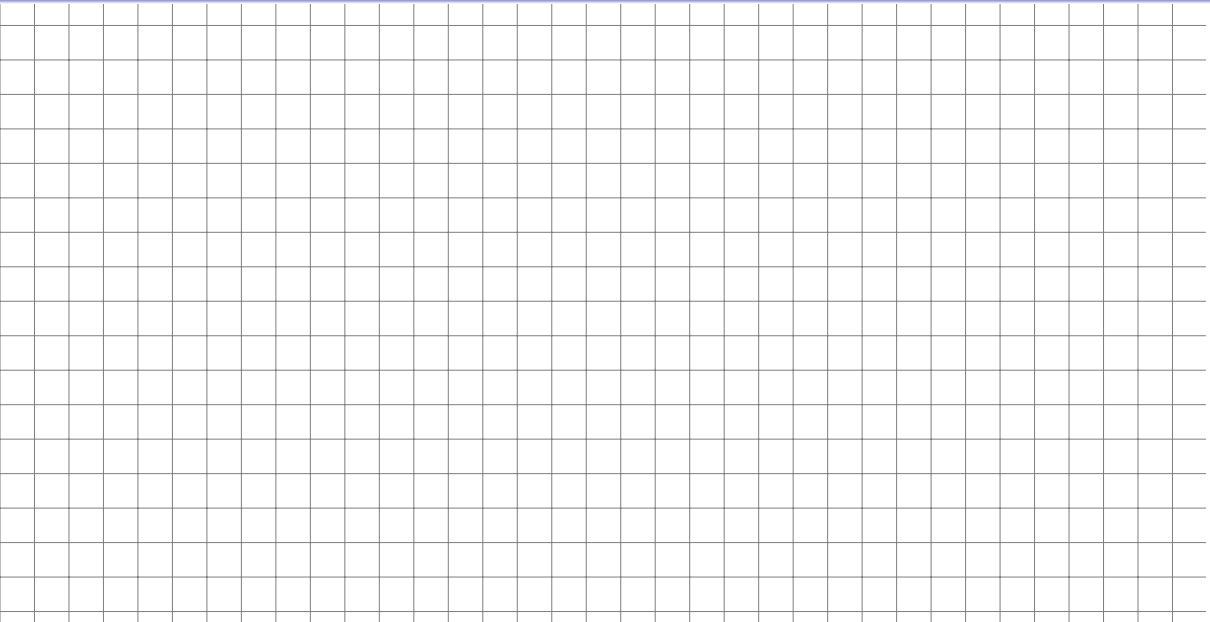
CONSTRUCTION D'UNE MÉTHODES ITÉRATIVE II



LA MÉTHODE DE JACOBI I



LA MÉTHODE DE JACOBI II



LA MÉTHODE DE GAUSS-SEIDEL I

CRITÈRES DE CONVERGENCE

