Analyse Numérique SV

Systèmes Linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

EPFL

Formulation du problème

On appelle système linéaire d'ordre n (n entier positif), une expression de la forme

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b},$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice de taille $n \times n$ donnée, $\mathrm{b} = (b_j)$ est un vecteur colonne également donné et $\mathrm{x} = (x_j)$ est le vecteur des inconnues du système. La relation précédente équivaut aux n équations

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

La matrice A est dite *régulière (non singulière)* si $\det(A) \neq 0$. On a l'existence et l'unicité de la solution x (pour n'importe quel vecteur b donné) si et seulement si la matrice associée au système linéaire est régulière.

Sommaire méthodes itératives

- Méthodes itératives : définitions
- Méthode de Richardson
- Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel
  Critères de convergence
- Méthodes du Gradient et du Gradient Conjugués
  Critères de convergence

Méthodes itératives

Résoudre un système linéaire $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ par une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs $\mathrm{x}^{(k)}$, $k \geq 0$, de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers la solution exacte x, c'est-à-dire :

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{x}$$

pour n'importe quelle donnée initiale $\mathrm{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
On peut considérer la relation de récurrence suivante :

$$\mathrm{x}^{(k+1)} = B\mathrm{x}^{(k)} + \mathrm{g}, \quad k \geq 0 \tag{1}$$

où B est une matrice bien choisie (dépendante de A) et g est un vecteur (dépendant de A et de b), qui vérifient la relation (de consistance)

$$\mathrm{x} = B\mathrm{x} + \mathrm{g}. \tag{2}$$

Construction d'une méthods itérative I

Construction d'une méthods itérative II

La méthode de Jacobi I

La méthode de Jacobi II

La méthode de Gauss-Seidel I

Critères de convergence