

ANALYSE NUMÉRIQUE SV

SYSTÈMES LINÉAIRES

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2022

EPFL

FORMULATION DU PROBLÈME

On appelle **système linéaire d'ordre n** (n entier positif), une expression de la forme

$$Ax = b,$$

où $A = (a_{ij})$ est **une matrice** de taille $n \times n$ donnée, $b = (b_j)$ est un **vecteur** colonne également **donné** et $x = (x_j)$ est le **vecteur des inconnues** du système. La relation précédente équivaut aux n équations

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

La matrice A est dite **régulière (non singulière)** si $\det(A) \neq 0$. On a **l'existence et l'unicité** de la solution x (pour n'importe quel vecteur b donné) si et seulement si la matrice associée au système linéaire est régulière.

SOMMAIRE MÉTHODES ITÉRATIVES

- Méthodes itératives : définitions
- Méthode de Richardson
- Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel
 - Critères de convergence
- Méthodes du Gradient et du Gradient Conjugués
 - Critères de convergence

MÉTHODES ITÉRATIVES

Résoudre un système linéaire $Ax = b$ par une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs $x^{(k)}$, $k \geq 0$, de \mathbb{R}^n qui converge vers la solution exacte x , c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$$

pour n'importe quelle donnée initiale $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

On peut considérer la relation de récurrence suivante

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \quad k \geq 0 \quad (1)$$

où B est une matrice bien choisie (dépendante de A) et g est un vecteur (dépendant de A et de b), qui vérifient la relation (de consistance)

$$x = Bx + g. \quad (2)$$

Étant donné que $x = A^{-1}b$, on obtient $g = (I - B)A^{-1}b$; la méthode itérative est donc complètement définie par la matrice B qui est appellée *matrice d'itération*. En définissant l'erreur à l'itération k comme

$$e^{(k)} = x - x^{(k)},$$

on obtient la relation de récurrence :

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)} \quad \text{et donc} \quad e^{(k+1)} = B^{k+1}e^{(0)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

On peut montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{(k)} = 0$ pour tout $\mathbf{e}^{(0)}$ (et donc pour tout $\mathbf{x}^{(0)}$) si et seulement si

$$\rho(B) < 1,$$

où $\rho(B)$ est le *rayon spectral* de la matrice B , défini par

$$\rho(B) = \max |\lambda_i(B)|$$

et $\lambda_i(B)$ sont les valeurs propres de la matrice B .

Plus la valeur de $\rho(B)$ est petite, moins il est nécessaire d'effectuer d'itérations pour réduire l'erreur initiale d'un facteur donné. Plus précisément :

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\| \leq \rho(B) \|\mathbf{e}^{(k)}\| \quad \text{et donc} \quad \|\mathbf{e}^{(k+1)}\| \leq \rho(B)^{k+1} \|\mathbf{e}^{(0)}\|, \quad k = 0, 1, \dots$$

CONSTRUCTION D'UNE MÉTHODE ITÉRATIVE

Une approche générale pour construire une méthode itérative est basée sur la décomposition de la matrice A :

$$A = P - (P - A)$$

où P est une matrice inversible appelée *préconditionneur* de A .

Alors,

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Px = (P - A)x + b$$

qui est de la forme (2) en posant

$$B = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A \quad \text{et} \quad g = P^{-1}b.$$

On peut définir la méthode itérative correspondante

$$P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = r^{(k)} \quad k \geq 0$$

où $r^{(k)}$ désigne le *résidu* à l'itération k : $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

On peut généraliser cette méthode de la manière suivante :

$$P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha_k r^{(k)} \quad k \geq 0 \quad (3)$$

où $\alpha_k \neq 0$ est un paramètre pour améliorer la convergence de la suite $x^{(k)}$.

La méthode (3) est appelée *méthode de Richardson*.

La matrice P doit être choisie de telle manière que le coût de la résolution de (3) soit assez faible. Par exemple, une matrice P diagonale ou triangulaire vérifierait ce critère.

LA MÉTHODE DE JACOBI

Si les éléments diagonaux de A sont non nuls, on peut poser

$$P = D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

D étant la partie diagonale de A :

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{ij} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

La méthode de Jacobi correspond à ce choix avec $\alpha_k = 1$ pour tout k .
On déduit alors :

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - (A - D)\mathbf{x}^{(k)} \quad k \geq 0.$$

Par composantes :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

La méthode de Jacobi peut s'écrire sous la forme générale

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g,$$

avec

$$B = B_J = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A, \quad g = g_J = D^{-1}b.$$

LA MÉTHODE DE GAUSS-SEIDEL

Cette méthode est définie par la formule suivante :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Cette méthode correspond à (1) avec $\alpha_k = 1$ ($\forall k \geq 0$) et P_{GS} la matrice triangulaire inférieure

$$\begin{cases} P_{ij} = a_{ij} & \text{si } i \geq j \\ P_{ij} = 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

(partie triangulaire inférieure de A avec la diagonale).

On peut écrire cette méthode sous la forme (3), avec la matrice d'itération $B = B_{GS}$ donnée par

$$B_{GS} = P_{GS}^{-1}(P_{GS} - A)$$

et

$$g_{GS} = P_{GS}^{-1}b.$$

CRITÈRES DE CONVERGENCE

On a la relation suivante :

Si A est une matrice symétrique définie positive, alors

$$\frac{\|x^{(k)} - x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|}. \quad (5)$$

L'erreur relative à la k -ième itération peut être majorée par le résidu relatif multiplié par le conditionnement de A .

En particulier, si $K(A) \approx 1$, une petite valeur de la norme du résidu correspond à une petite valeur de la norme de l'erreur ; si $K(A) \gg 1$, cette relation peut être fausse.

On a également une estimation (utilisée si $P \neq I$) :

$$\frac{\|x^{(k)} - x\|}{\|x\|} \leq K(P^{-1}A) \frac{\|P^{-1}r^{(k)}\|}{\|P^{-1}b\|}.$$

CONVERGENCE : CONDITIONS SUFFISANTES

- Condition nécessaire et suffisante : $\rho(B) < 1$.
- Si A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne, c'est-à-dire*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes

- Soit A *régulière, tridiagonale et dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls*. Alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont toutes les deux soit divergentes soit convergentes. Dans le deuxième cas, $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$
- Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge (la méthode de Jacobi pas forcément).*

LA MÉTHODE DE RICHARDSON PRÉCONDITIONNÉE

Considérons la méthode itérative générale :

$$P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = \alpha_k r^{(k)}, \quad k \geq 0. \quad (6)$$

Cette méthode est appelée **méthode de Richardson stationnaire préconditionnée** si $\alpha_k = \alpha$ (une constante donnée); autrement elle est dite **méthode de Richardson dynamique préconditionnée** quand α_k peut varier au cours des itérations.

La matrice inversible P est appelée *préconditionneur* de A .

RICHARDSON : CHOIX DE α_k

Si A et P sont *symétriques définies positives*, alors on a deux critères optimaux pour le choix de α_k :

1. *Cas stationnaire* :

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}, \quad k \geq 0,$$

où λ_{min} et λ_{max} désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice $P^{-1}A$.

2. *Cas dynamique* :

$$\alpha_k = \frac{(z^{(k)})^T r^{(k)}}{(z^{(k)})^T A z^{(k)}}, \quad k \geq 0,$$

où $z^{(k)} = P^{-1}r^{(k)}$ est le résidu préconditionné.

Cette méthode est aussi appelée *méthode du gradient préconditionné*.

LA MÉTHODE DE RICHARDSON NON-PRECONDITIONNÉE

Si $P = I$ et A est symétrique définie positive, on trouve les méthodes :

- de **Richardson stationnaire** si on choisit :

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}. \quad (7)$$

- du **gradient** si :

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{r}^{(k)})^T A \mathbf{r}^{(k)}}, \quad k \geq 0. \quad (8)$$

ALGORITHME DU GRADIENT PRÉCONDITIONNÉ

On peut réécrire plus efficacement la méthode du gradient préconditionné de la manière suivante : soit $x^{(0)}$, poser $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, puis pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} Pz^{(k)} &= r^{(k)} \\ \alpha_k &= \frac{(z^{(k)})^T r^{(k)}}{(z^{(k)})^T Az^{(k)}} \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_k z^{(k)} \\ r^{(k+1)} &= r^{(k)} - \alpha_k Az^{(k)}. \end{aligned}$$

On observe qu'on doit résoudre un système linéaire pour la matrice P à chaque itération ; donc P doit être telle que la résolution du système associé soit facile (c'est-à-dire avec un coût raisonnable). Par exemple, on pourra choisir P diagonale (comme dans le cas du gradient ou de Richardson stationnaire) ou triangulaire.

CONVERGENCE DE LA MÉTH. DE RICHARDSON

Considérons tout d'abord les méthodes de Richardson stationnaires ; on a le résultat de convergence suivant :

THÉORÈME (CAS STATIONNAIRE)

On suppose la matrice P inversible et les valeurs propres de $P^{-1}A$ strictement positives et telles que $\lambda_{\max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{\min} > 0$. Alors la méthode de Richardson stationnaire est convergente si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. De plus, le rayon spectral de la matrice d'itération R_α est minimal si $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}},$$

avec

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$$

Dans le cas dynamique, on a un résultat qui permet de choisir de façon optimale le paramètre d'accélération à chaque étape, si la matrice A est symétrique définie positive :

THÉORÈME (CAS DYNAMIQUE)

Si A est symétrique définie positive, le choix optimal de α_k est donné par

$$\alpha_k = \frac{(r^{(k)}, z^{(k)})}{(Az^{(k)}, z^{(k)})}, \quad k \geq 0 \quad (9)$$

où

$$z^{(k)} = P^{-1}r^{(k)}. \quad (10)$$

Si on choisit les coefficients α de manière optimale, pour les cas stationnaire et dynamique, on peut démontrer que, si A et P sont symétriques définies positives, la suite $\{x^{(k)}\}$ donnée par la méthode de Richardson (stationnaire et dynamique) converge vers x lorsque $k \rightarrow \infty$, et

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|x^{(0)} - x\|_A, \quad k \geq 0, \quad (11)$$

où $\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}$ et $K(P^{-1}A)$ est le conditionnement de la matrice $P^{-1}A$:

$$K(C) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(C^T C)}{\lambda_{\min}(C^T C)}}$$

Remarque. Dans le cas de la méthode du gradient ou de Richardson stationnaire (sans préconditionneur) l'estimation de l'erreur devient

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq \left(\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1} \right)^k \|x^{(0)} - x\|_A, \quad k \geq 0. \quad (12)$$

Remarque. Si A et P sont symétriques définies positives, on a

$$K(P^{-1}A) = \frac{\lambda_{\max}(P^{-1}A)}{\lambda_{\min}(P^{-1}A)}.$$

LA MÉTHODE DU GRADIENT CONJUGUÉ

Une méthode encore plus rapide dans le cas où P et A sont **symétriques définies positives** est celle du *gradient conjugué préconditionné* qui s'exprime ainsi : soit $x^{(0)}$ une donnée initiale ; on calcule $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $z^{(0)} = P^{-1}r^{(0)}$, $p^{(0)} = z^{(0)}$, puis pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 \alpha_k &= \frac{p^{(k)T} r^{(k)}}{p^{(k)T} A p^{(k)}} \\
 x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \\
 r^{(k+1)} &= r^{(k)} - \alpha_k A p^{(k)} \\
 Pz^{(k+1)} &= r^{(k+1)} \\
 \beta_k &= \frac{(Ap^{(k)})^T z^{(k+1)}}{(Ap^{(k)})^T p^{(k)}} \\
 p^{(k+1)} &= z^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'estimation de l'erreur est donnée par

$$\|x^{(k)} - x\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|x^{(0)} - x\|_A, \quad k \geq 0$$

où $c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$. (13)

