Analyse Numérique SV
Systèmes Linéaires
Méthodes itératives

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2022

EPFL

Formulation du problème

On appelle système linéaire d'ordre n (n entier positif), une expression de la forme

$$Ax = b,$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice de taille $n \times n$ donnée, $b = (b_j)$ est un vecteur colonne également donné et $x = (x_j)$ est le vecteur des inconnues du système. La relation précédente équivaut aux n équations

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

La matrice A est dite *régulière (non singulière)* si $\det(A) \neq 0$. On a l'existence et l'unicité de la solution x (pour n'importe quel vecteur b donné) si et seulement si la matrice associée au système linéaire est régulière.

Sommaire méthodes itératives

- Méthodes itératives : définitions
- Méthode de Richardson
- Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel
  Critères de convergence
- Méthodes du Gradient et du Gradient Conjugués
  Critères de convergence

Méthodes itératives I

Résoudre un système linéaire $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ par une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs $\mathrm{x}^{(k)}$, $k \geq 0$, de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers la solution exacte x, c'est-à-dire :

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{x}$$

pour n'importe quelle donnée initiale $\mathrm{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
On peut considérer la relation de récurrence suivante :

$$\mathrm{x}^{(k+1)} = B\mathrm{x}^{(k)} + \mathrm{g}, \quad k \geq 0 \tag{1}$$

où B est une matrice bien choisie (dépendante de A) et g est un vecteur (dépendant de A et de b), qui vérifient la relation (de consistance)

$$\mathrm{x} = B\mathrm{x} + \mathrm{g}. \tag{2}$$

Méthodes itératives II

Étant donné que $\mathrm{x} = A^{-1}\mathrm{b}$, on obtient $\mathrm{g} = (I - B)A^{-1}\mathrm{b}$; la méthode itérative est donc complètement définie par la matrice B qui est appellée *matrice d'itération*. En définissant l'erreur à l'itération k comme

$$\boxed{\mathrm{e}^{(k)} = \mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k)},}$$

on obtient la relation de récurrence :

$$\boxed{\mathrm{e}^{(k+1)} = B\mathrm{e}^{(k)} \quad \text{et donc} \quad \mathrm{e}^{(k+1)} = B^{k+1}\mathrm{e}^{(0)}, \qquad k = 0, 1, \ldots .}$$

Critère de convergence suffisant et nécessaire

On peut montrer que $\lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{(k)} = 0$ pour tout $\mathrm{e}^{(0)}$ (et donc pour tout $\mathrm{x}^{(0)}$) si et seulement si

$$\boxed{\rho(B) < 1,}$$

où $\rho(B)$ est le *rayon spectral* de la matrice B, défini par

$$\boxed{\rho(B) = \max |\lambda_i(B)|}$$

et $\lambda_i(B)$ sont les valeurs propres de la matrice B.

Plus la valeur de $\rho(B)$ est petite, moins il est nécessaire d'effectuer d'itérations pour réduire l'erreur initiale d'un facteur donné. Plus précisement :

$$\boxed{||\mathrm{e}^{(k+1)}|| \leq \rho(B)||\mathrm{e}^{(k)}|| \quad \text{et donc} \quad ||\mathrm{e}^{(k+1)}|| \leq \rho(B)^{k+1}||\mathrm{e}^{(0)}||, \quad k = 0, 1, \ldots .}$$

Construction d'une méthode itérative I

Une approche générale pour construire une méthode itérative est basée sur la décomposition de la matrice A :

$$A = P - (P - A)$$

où P est une matrice inversible appelée *préconditionneur* de A. Alors,

$$\begin{aligned} A\mathrm{x} = \mathrm{b} \quad &\Leftrightarrow \quad [P + (A - P)]\,\mathrm{x} = \mathrm{b} \quad \Leftrightarrow \quad P\mathrm{x} = (P - A)\mathrm{x} + \mathrm{b} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{x} = P^{-1}(P - A)\mathrm{x} + P^{-1}\mathrm{b} \end{aligned}$$

qui est de la forme (2) en posant

$$B = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A \quad \text{et} \quad \mathrm{g} = P^{-1}\mathrm{b}.$$

La méthode itérative est construite en remplaçant

$$P\mathrm{x} = (P - A)\mathrm{x} + \mathrm{b} \qquad \text{par} \qquad P\mathrm{x}^{(k+1)} = (P - A)\mathrm{x}^{(k)} + \mathrm{b}$$

Construction d'une méthode itérative II

$$P\mathrm{x}^{(k+1)} = (P - A)\mathrm{x}^{(k)} + \mathrm{b} \quad \Leftrightarrow \quad P\mathrm{x}^{(k+1)} - P\mathrm{x}^{(k)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(k)}$$

On peut définir la méthode itérative correspondante :
Soit $\mathrm{x}^{(0)}$ donné, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(\mathrm{x}^{(k+1)} - \mathrm{x}^{(k)}) = \mathrm{r}^{(k)}$$

où $\mathrm{r}^{(k)}$ désigne le *résidu* à l'itération k : $\boxed{\mathrm{r}^{(k)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(k)}}$
On peut généraliser cette méthode de la manière suivante :

$$P(\mathrm{x}^{(k+1)} - \mathrm{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathrm{r}^{(k)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

où $\alpha_k \neq 0$ est un paramètre pour améliorer la convergence de la suite $\mathrm{x}^{(k)}$.

La méthode de Richardson préconditionnée

Richardson préconditionnée

Soit $x^{(0)}$ donné, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\text{trouvez } z^{(k)} \text{ tel que } \quad Pz^{(k)} = r^{(k)} \qquad (3)$$

$$\text{choisissez } \alpha_k$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k z^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)}$$

La matrice P doit être choisie de telle manière que

- le coût de la résolution de (3) soit assez faible.
- puisque $B = P^{-1}(P - A)$, P doit être assez "proche" de A.

Choix simples possibles :

- α_k constant, par exemple $\alpha = 1$
- P égale à la diagonale D de A
- P égale à la partie trinagulaire inférieure de A (inclu la digonale)

La méthode de Jacobi

Si les éléments diagonaux de A sont non nuls, on peut poser $P_J = D$, la partie diagonale de A.
On déduit alors :

$$D\mathrm{x}^{(k+1)} = \mathrm{b} - (A - D)\mathrm{x}^{(k)} \qquad k \geq 0.$$

Par composantes :

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, \ldots, n.} \tag{4}$$

La méthode de Jacobi peut s'écrire sous la forme générale $\mathrm{x}^{(k+1)} = B\mathrm{x}^{(k)} + \mathrm{g}$,

avec $\boxed{B = B_J = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A,}$ et $\mathrm{g} = \mathrm{g}_J = D^{-1}\mathrm{b}$.

La méthode de Gauss-Seidel

Prenond $\alpha = 1$ et P_{GS} la partie triangulaire inférieure de A avec la diagonale.

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n.}$$

On peut écrire cette méthode sous la forme (3), avec la matrice d'itération $B = B_{GS}$ donnée par

$$\boxed{B_{GS} = P_{GS}^{-1}(P_{GS} - A)} \text{ et } \mathrm{g}_{GS} = P_{GS}^{-1}\mathrm{b}.$$

Critères de convergence

On a la relation suivante :
Si A est une matrice symétrique définie positive, alors

$$\boxed{\frac{\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|}{\|\mathrm{x}\|} \leq K(A)\frac{\|\mathrm{r}^{(k)}\|}{\|\mathrm{b}\|}.} \tag{5}$$

L'erreur relative à la k-ième itération peut être majorée par le résidu relatif multiplié par le conditionnement de A.
En particulier, si $K(A) \approx 1$, une petite valeur de la norme du résidu correspond à une petite valeur de la norme de l'erreur ; si $K(A) \gg 1$, cette relation peut être fausse.
On a également une estimation (utilisée si $P \neq I$) :

$$\boxed{\frac{\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|}{\|\mathrm{x}\|} \leq K(P^{-1}A)\frac{\|P^{-1}\mathrm{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathrm{b}\|}.}$$

Convergence : conditions suffisantes

- Condition nécessaire et suffisante : $\rho(B) < 1$.

- *Si A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne, c'est-à-dire*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ldots,n; j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

  alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes

- Soit A régulière, tridiagonale et dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls. Alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont toutes les deux soit divergentes soit convergentes. Dans le deuxième cas, $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$

- *Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge (la méthode de Jacobi pas forcément).*

La méthode de Richardson Préconditionnée

Richardson préconditionnée

Soit $\mathrm{x}^{(0)}$ donné, $\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} \text{trouvez } \mathrm{z}^{(k)} \text{ tel que} \quad & P\mathrm{z}^{(k)} = \mathrm{r}^{(k)} \qquad (3) \\ \text{choisissez } \alpha_k \quad & \\ & \mathrm{x}^{(k+1)} = \mathrm{x}^{(k)} + \alpha_k \mathrm{z}^{(k)} \\ & \mathrm{r}^{(k+1)} = \mathrm{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathrm{z}^{(k)}. \end{aligned}$$

Cette méthode est appelée

- méthode de Richardson stationnaire préconditionnée si $\alpha_k = \alpha$ (une constante donnée) ;
- autrement elle est dite méthode de Richardson dynamique préconditionnée quand α_k peut varier au cours des itérations.

La matrice inversible P est appelée *préconditionneur* de A.

Richardson : choix de α_k

Si A et P sont symétriques définies positives, alors on a deux critères optimaux pour le choix de α_k :

1. *Cas stationnaire* :

$$\boxed{\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}, \qquad k = 0, 1, \ldots}$$

   où λ_{min} et λ_{max} désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice $P^{-1}A$.

2. *Cas dynamique* :

$$\boxed{\alpha_k = \frac{(\mathrm{z}^{(k)})^T \mathrm{r}^{(k)}}{(\mathrm{z}^{(k)})^T A \mathrm{z}^{(k)}}, \qquad k = 0, 1, \ldots}$$

   où $\mathrm{z}^{(k)} = P^{-1}\mathrm{r}^{(k)}$ est le résidu préconditionné.
   Cette méthode est aussi appelée méthode du gradient préconditionné.

La méthode de Richardson non-préconditionnée

Si $P = I$ et A est symétrique définie positive, alors les critères optimaux sont :

- cas stationnaire :

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}.$$

- cas dynamique, appelé méthode du gradient si :

$$\alpha_k = \frac{\left(\mathrm{r}^{(k)}\right)^T \mathrm{r}^{(k)}}{\left(\mathrm{r}^{(k)}\right)^T A \mathrm{r}^{(k)}},$$

Algorithme du Gradient préconditionné

On peut réécrire plus efficacement la méthode du gradient préconditionné de la manière suivante : soit $\mathrm{x}^{(0)}$, poser $\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)}$, puis pour $k = 0, 1, \dots,$

$$\begin{aligned} P\mathrm{z}^{(k)} &= \mathrm{r}^{(k)} \\ \alpha_k &= \frac{(\mathrm{z}^{(k)})^T \mathrm{r}^{(k)}}{(\mathrm{z}^{(k)})^T A\mathrm{z}^{(k)}} \\ \mathrm{x}^{(k+1)} &= \mathrm{x}^{(k)} + \alpha_k \mathrm{z}^{(k)} \\ \mathrm{r}^{(k+1)} &= \mathrm{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathrm{z}^{(k)}. \end{aligned}$$

On observe qu'on doit résoudre un système linéaire pour la matrice P à chaque itération ; donc P doit être telle que la résolution du système associé soit facile (c'est-à-dire avec un coût raisonnable). Par exemple, on pourra choisir P diagonale ou triangulaire.

Convergence de la méth. de Richardson

Considérons tout d'abord les méthodes de Richardson stationnaires ; on a le résultat de convergence suivant :

Théorème (Cas stationnaire)

On suppose la matrice P inversible et les valeurs propres de $P^{-1}A$ strictement positives et telles que $\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n = \lambda_{min} > 0$. Alors la méthode de Richardson stationnaire est convergente si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. De plus, le rayon spectral de la matrice d'itération R_α est minimal si $\alpha = \alpha_{opt}$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}},$$

avec

$$\rho_{opt} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

Dans le cas dynamique, on a un résultat qui permet de choisir de façon optimale le paramètre d'accélération à chaque étape, si les matrice A et P sont symétrique définie positives :

Théorème (Cas dynamique)

Si A est symétrique définie positive, le choix optimal de α_k est donné par

$$\alpha_k = \frac{(\mathrm{r}^{(k)}, \mathrm{z}^{(k)})}{(A\mathrm{z}^{(k)}, \mathrm{z}^{(k)})}, \qquad k \geq 0$$

où

$$\mathrm{z}^{(k)} = P^{-1}\mathrm{r}^{(k)}.$$

Si on choisit les coefficients α de manière optimale, pour les cas stationnaire et dynamique, on peut démontrer que, si A et P sont symétriques définies positives, la suite $\{\mathrm{x}^{(k)}\}$ donnée par la méthode de Richardson (stationnaire et dynamique) converge vers x lorsque $k \to \infty$, et

$$\boxed{\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|\mathrm{x}^{(0)} - \mathrm{x}\|_A, \quad k \geq 0,}$$

où $\|\mathrm{v}\|_A = \sqrt{\mathrm{v}^T A \mathrm{v}}$ et $K(P^{-1}A)$ est le conditionnement de la matrice $P^{-1}A$,

$$K(C) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(C^T C)}{\lambda_{\min}(C^T C)}} \qquad \text{Si } C \text{ sdp, } K(C) = \frac{\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\min}(C)}$$

Remarque. Dans le cas de la méthode du gradient ou de Richardson stationnaire (sans préconditionneur) l'estimation de l'erreur devient

$$\boxed{\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_A \leq \left(\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1}\right)^k \|\mathrm{x}^{(0)} - \mathrm{x}\|_A, \quad k \geq 0.}$$

Remarque. Si A et P sont symétriques définies positives, on a

$$K(P^{-1}A) = \frac{\lambda_{max}(P^{-1}A)}{\lambda_{min}(P^{-1}A)}.$$

La méthode du gradient conjugué

Une méthode encore plus rapide dans le cas où P et A sont symétriques définies positives est celle du *gradient conjugué préconditionné* qui s'exprime ainsi :
soit $\mathrm{x}^{(0)}$ une donnée initiale ; on calcule $\mathrm{r}^{(0)} = \mathrm{b} - A\mathrm{x}^{(0)}$, $\mathrm{z}^{(0)} = P^{-1}\mathrm{r}^{(0)}$, $\mathrm{p}^{(0)} = \mathrm{z}^{(0)}$, puis pour $k \geq 0$,

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\alpha_k = \frac{\mathrm{p}^{(k)^T}\mathrm{r}^{(k)}}{\mathrm{p}^{(k)^T} A\mathrm{p}^{(k)}}\\
&\mathrm{x}^{(k+1)} = \mathrm{x}^{(k)} + \alpha_k \mathrm{p}^{(k)}\\
&\mathrm{r}^{(k+1)} = \mathrm{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathrm{p}^{(k)}\\
&P\mathrm{z}^{(k+1)} = \mathrm{r}^{(k+1)}\\
&\beta_k = \frac{\left(A\mathrm{p}^{(k)}\right)^T \mathrm{z}^{(k+1)}}{\left(A\mathrm{p}^{(k)}\right)^T \mathrm{p}^{(k)}}\\
&\mathrm{p}^{(k+1)} = \mathrm{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathrm{p}^{(k)}\,.
\end{aligned}
}
$$

Dans ce cas, l'estimation de l'erreur est donnée par

$$\boxed{\|\mathrm{x}^{(k)} - \mathrm{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1+c^{2k}} \|\mathrm{x}^{(0)} - \mathrm{x}\|_A\,, \quad k \geq 0} \text{ où } \boxed{c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)}-1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)}+1}\,.} \qquad (6)$$