Analyse Numérique SV

Systèmes Linéaires
Méthodes itératives

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025

Convergence : conditions suffisantes

- Condition nécessaire et suffisante : $\rho(B) < 1$.

- *Si A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne, c'est-à-dire*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\dots,n;j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

  alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes
- Soit A régulière, tridiagonale et dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls. Alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont toutes les deux soit divergentes soit convergentes. Dans le deuxième cas, $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$
- *Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel converge (la méthode de Jacobi pas forcément).*

La méthode de Richardson Préconditionnée

Richardson préconditionnée

Soit $\mathbf{x}^{(0)}$ donné, $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} \text{trouvez } \mathbf{z}^{(k)} \text{ tel que} \qquad & P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \\ \text{choisissez } \alpha_k \qquad & \\ & \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ & \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)}. \end{aligned}$$

Cette méthode est appelée

- méthode de Richardson stationnaire préconditionnée si $\alpha_k = \alpha$ (une constante donnée) ;
- autrement elle est dite méthode de Richardson dynamique préconditionnée quand α_k peut varier au cours des itérations.

La matrice inversible P est appelée *préconditionneur* de A.

Richardson : choix de α_k

Si A et P sont symétriques définies positives, alors on a deux critères optimaux pour le choix de α_k :

1. *Cas stationnaire* :

$$\boxed{\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}, \qquad k = 0, 1, \dots}$$

   où λ_{min} et λ_{max} désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice $P^{-1}A$.

2. *Cas dynamique* :

$$\boxed{\alpha_k = \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A \mathbf{z}^{(k)}}, \qquad k = 0, 1, \dots}$$

   où $\mathbf{z}^{(k)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$ est le résidu préconditionné.
   Cette méthode est aussi appelée méthode du gradient préconditionné.

Convergence de la méth. de Richardson

Considérons tout d'abord les méthodes de Richardson stationnaires ; on a le résultat de convergence suivant :

Théorème (Cas stationnaire)

On suppose la matrice P inversible et les valeurs propres de $P^{-1}A$ strictement positives et telles que $\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n = \lambda_{min} > 0$. Alors la méthode de Richardson stationnaire est convergente si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. De plus, le rayon spectral de la matrice d'itération R_α est minimal si $\alpha = \alpha_{opt}$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}},$$

avec

$$\rho_{opt} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

Si on choisit les coefficients α de manière optimale, pour les cas stationnaire et dynamique, on peut démontrer que, si A et P sont symétriques définies positives, la suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ donnée par la méthode de Richardson (stationnaire et dynamique) converge vers $\mathbf{x}$ lorsque $k \to \infty$, et

$$\boxed{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1}\right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad k \geq 0,}$$

où $\|\mathbf{v}\|_A = \sqrt{\mathbf{v}^T A \mathbf{v}}$ et $K(P^{-1}A)$ est le conditionnement de la matrice $P^{-1}A$,

$$K(C) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(C^T C)}{\lambda_{\min}(C^T C)}} \qquad \text{Si } C \text{ sdp, } K(C) = \frac{\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\min}(C)}$$

Exercice 5 I

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Supposons qu'il existe une constante $0 < C < 1$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A \leq C\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \,.$$

Démontrez la majoration de l'erreur suivante (remarquez que l'estimation est indépendante de la solution $\mathbf{x}$) :

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{C^k}{1-C}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_A.$$

Exercice 5 II

Suggestion : estimez $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$ par rapport à $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_A$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour $(\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(1)}) + (\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x})$.

2. On considère la méthode de Richardson stationnaire préconditionné, avec la matrice de préconditionnement $P = D$, D étant la partie diagonale de A. La méthode est-elle convergente ? Calculez le paramètre α_{opt} optimal.
3. Sans calculer la solution exacte et en choisissant comme vecteur initial $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur (en norme $\|\cdot\|_A$) plus petite que 10^{-8}.

Exercice 5 III

Exercice 5, solution

Exercice 6 I

On considère le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. On considère la méthode de Richardson stationnaire préconditionné, avec matrice de préconditionnement $P = D$, D étant la partie diagonale de A. Pour quel choix de $\alpha_k = const$ la méthode est-elle convergente ? Calculez le paramètre α_{opt} optimal.
2. On considère maintenant la méthode du gradient préconditionné, toujours avec le préconditionneur $P = D$. La méthode est-elle convergente ? Calculez le facteur C_G de réduction de l'erreur tel que

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A \leq C_{\mathrm{G}} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A.$$

Exercice 6 II

3. Ici la solution est $\mathbf{x}^{ex} = (1,1,1)^T$. Calculez la A-norme de $\mathbf{x}^{ex}$, $\|\mathbf{x}^{ex}\|_A$.
4. Estimez le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer la solution $\mathbf{x}$ du système linéaire donnée par la méthode du gradient préconditionné avec une tolérance $tol = 10^{-2}$ sur l'erreur $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_A$ et une solution de départ $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$. Ensuite, calculez l'erreur en utilisant le même nombre d'itérations avec la méthode du gradient conjugué préconditionné. L'erreur est-elle plus petite que 10^{-2} ? Pourquoi ?

Exercice 6 III

Exercice 6, solution

Exercice 7 I

On considère le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1/2 & 0 \\ \alpha - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta + 1 \\ 0 \\ \gamma/2 \end{pmatrix}.$$

1. Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $\gamma \in \mathbb{R}$ pour que les méthodes de Gauss–Seidel et de Jacobi soient convergentes.
2. Calculer les matrices d'itération B_J et B_{GS} des méthodes de Jacobi et Gauss–Seidel respectivement. Etablir pour quelles valeurs de α et β les méthodes sont convergentes et indiquer quel est le rapport entre leurs vitesses de convergence.

Exercice 7 II

3. Pour quelles valeurs des paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, et $\gamma \in \mathbb{R}$ pourrait-on appliquer au système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la méthode de Richardson stationnaire ? Dans le cas où $\alpha = \beta$, quel est le choix optimal du paramètre d'accéleration ? En utilisant les même paramètres, déterminer le facteur de réduction de l'erreur correspondant, c'est à dire la constante $C > 0$ t.q.

$$||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_A \leq C^k ||\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}||_A, \quad \forall\, k \geq 0.$$

4. On veut résoudre le système linéaire par une méthode directe : quelle factorisation de la matrice A envisageriez-vous ? Justifier votre réponse.
5. On pose $\alpha = 0$, $\beta = 1$, et $\gamma = 2$. Calculer la factorisation de la matrice A et résoudre le systéme linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Exercice 7 III

Exercice 7, solution

Méthode du gradient préconditionné I

$$
\begin{aligned}
P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\
\alpha_k &= \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A \mathbf{z}^{(k)}} \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\
\mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{z}^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Méthode du gradient préconditionné II

Analyse d'un exemple

Exemple

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + 3x_2 & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. A est symétrique définie positive. La solution du système est $x_1 = 3/5 = 0.6$ et $x_2 = -1/5 = -0.2$.

Étude préliminaire de convergence

Considérons la matrice associée au système : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Selon des critères suffisants connus, on a que

- A Jacobi converge
- B Gauss-Seidel converge
- C $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$
- D La méthode du gradient converge
- E La méthode du gradient conjugué converge
- F On ne peut rien affirmer

Étude préliminaire de convergence

- A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne. Alors, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.
- Le point précédent nous informe que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent dans ce cas, alors A est régulière, tridiagonale et avec les coefficients diagonaux non-nuls, on a $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$. Donc, on s'attend à ce que la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement que celle de Jacobi.
- A est symétrique définie positive, donc les méthodes du gradient préconditionné et du gradient conjugué préconditionné convergent. En plus, par construction de la méthode, on s'attend à ce que la méthode du gradient conjugué preconditionné converge plus vite que celle du gradient préconditionné.

On veut approcher la solution par une méthode itérative en partant de

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \overline{2} \end{pmatrix}.$$

On voit que

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$\|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{r}^{(0)})^T \mathbf{r}^{(0)}} = \frac{\sqrt{34}}{2} \approx 2.9155.$$

Méthode de Jacobi

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_J \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_J, \quad k \geq 0, \quad \text{où } B_J = I - D^{-1}A \text{ et } \mathbf{g}_J = D^{-1}\mathbf{b}.$$

On a

$$B_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $\rho(B_J) = max|\lambda_i(B_J)| = \texttt{max(abs(eig(}B_J\texttt{)))} = 0.4082.$

Pour $k = 0$ (1ère itérée) on trouve :

$$\mathbf{x}^{(1)} = B_J \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{g}_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.3333 \end{pmatrix}.$$

On remarque que

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.8333 \\ 0.75 \end{pmatrix} \qquad \text{et } \|\mathbf{r}^{(1)}\|_2 = 1.1211.$$

Méthode de Gauss-Seidel

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B_{GS}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}_{GS}, \quad k \geq 0, \quad \text{où } B_{GS} = (D-E)^{-1}(D-E-A)$$

$$\text{et } \mathbf{g}_{GS} = (D-E)^{-1}\mathbf{b}.$$

On a

$$B_{GS} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}_{GS} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas $\rho(B_{GS}) = max|\lambda_i(B_{GS})| = \texttt{max(abs(eig(}B_{GS}\texttt{)))} = 0.1667$.
On vérifie que $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$.

Pour $k = 0$ (1ère itérée) on trouve :

$$\mathbf{x}^{(1)} = B_{GS}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{g}_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.0833 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5833 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et } \|\mathbf{r}^{(1)}\|_2 = 0.5833.$$

Méthode du gradient préconditionné avec $P = D$

On pose $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

Pour $k = 0$, on a :

$$P\mathbf{z}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z}^{(0)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{(\mathbf{z}^{(0)})^T \mathbf{r}^{(0)}}{(\mathbf{z}^{(0)})^T A\mathbf{z}^{(0)}} = \frac{77}{107}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_0 \mathbf{z}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.4603 \\ -0.0997 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} - \alpha_0 A\mathbf{z}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.1791 \\ -0.1612 \end{pmatrix} \quad \text{et } \|\mathbf{r}^{(1)}\|_2 = 0.2410.$$

Méthode du gradient conjugué préconditionné avec $P = D$

On pose $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{z}^{(0)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(0)}$ et $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}$. Pour $k = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{(\mathbf{p}^{(0)})^T\mathbf{r}^{(0)}}{(\mathbf{p}^{(0)})^T A\mathbf{p}^{(0)}} = \frac{(\mathbf{z}^{(0)})^T\mathbf{r}^{(0)}}{(\mathbf{z}^{(0)})^T A\mathbf{z}^{(0)}} \\
\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_0\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha_0\mathbf{z}^{(0)} \\
\mathbf{r}^{(1)} &= \mathbf{r}^{(0)} - \alpha_0 A\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} - \alpha_0 A\mathbf{z}^{(0)}.
\end{aligned}$$

On voit que la première itérée $\mathbf{x}^{(1)}$ coïncide avec celle obtenue par la méthode du gradient préconditionné.

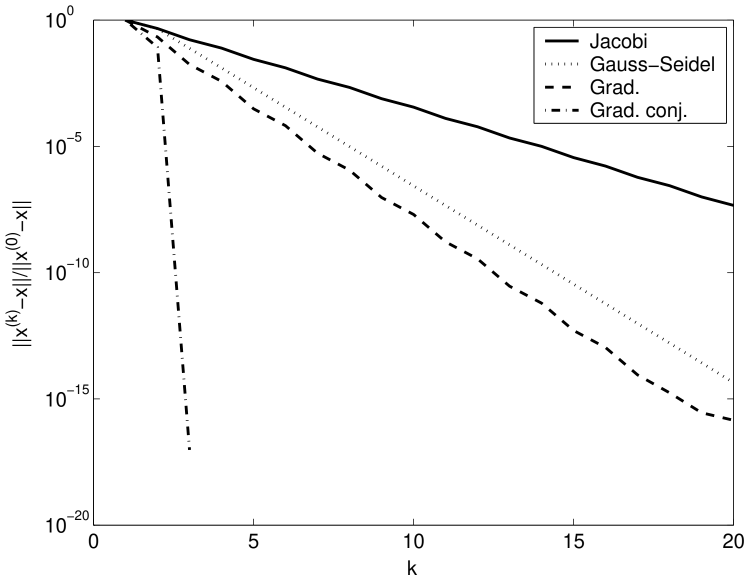
Puis, on termine la première itération de la méthode du gradient conjugué préconditionné :

$$
\begin{aligned}
P\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{z}^{(1)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0896 \\ -0.0537 \end{pmatrix} \\
\beta_0 = \frac{(A\mathbf{p}^{(0)})^T \mathbf{z}^{(1)}}{(A\mathbf{p}^{(0)})^T A\mathbf{p}^{(0)}} &= \frac{(A\mathbf{z}^{(0)})^T \mathbf{z}^{(1)}}{(A\mathbf{z}^{(0)})^T \mathbf{z}^{(0)}} = -0.0077 \\
\mathbf{p}^{(1)} = \mathbf{z}^{(1)} - \beta_0 \mathbf{p}^{(0)} &= \mathbf{z}^{(1)} - \beta_0 \mathbf{z}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.0838 \\ -0.0602 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Si, maintenant, on calcule la deuxième itérée $\mathbf{x}^{(2)}$ $(k=1)$ en utilisant ces quatre méthodes, on trouve :

Méthode	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{r}^{(2)}$	$\Vert\mathbf{r}^{(2)}\Vert_2$
Jacobi	$\begin{pmatrix} 0.6667 \\ -0.0833 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.2500 \\ -0.4167 \end{pmatrix}$	0.4859
Gauss-Seidel	$\begin{pmatrix} 0.5417 \\ -0.1806 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.0972 \\ 0 \end{pmatrix}$	0.0972
PG	$\begin{pmatrix} 0.6070 \\ -0.1877 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0263 \\ -0.0438 \end{pmatrix}$	0.0511
PCG	$\begin{pmatrix} 0.60000 \\ -0.2000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.2220 \\ -0.3886 \end{pmatrix} \cdot 10^{-15}$	$4.4755 \cdot 10^{-16}$

Comportement de l'erreur relative pour différentes méthodes itératives appliquées au système (1) :



Un autre exemple

Exemple

On considère maintenant le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 1 \\ -x_1 + 3x_2 & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

dont la solution est $x_1 = 3/7$, $x_2 = 1/7$.

Étude préliminaire de convergence

Considérons la matrice associée au système : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Selon des critères suffisants connus, on a que

- A Jacobi converge
- B Gauss-Seidel converge
- C $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$
- D La méthode du gradient converge
- E La méthode du gradient conjugué converge
- F On ne peut rien affirmer

Étude préliminaire de convergence

Considérons la matrice associée au système : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

- A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne. Donc, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.
- Le point précédent nous informe que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent dans ce cas, alors A est régulière, tridiagonale et avec les coefficients diagonaux non-nuls, on a $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$. Donc, on s'attend à ce que la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement que celle de Jacobi.
- A **n'est pas** symétrique définie positive, donc on n'a aucune garantie que les méthodes de Richardson stationnaire préconditionné, du gradient préconditionné et du gradient conjugué préconditionné convergent. En effet, même si elles convergent, la vitesse de convergence peut être assez lente car elle dépend du choix de α ou α_k.

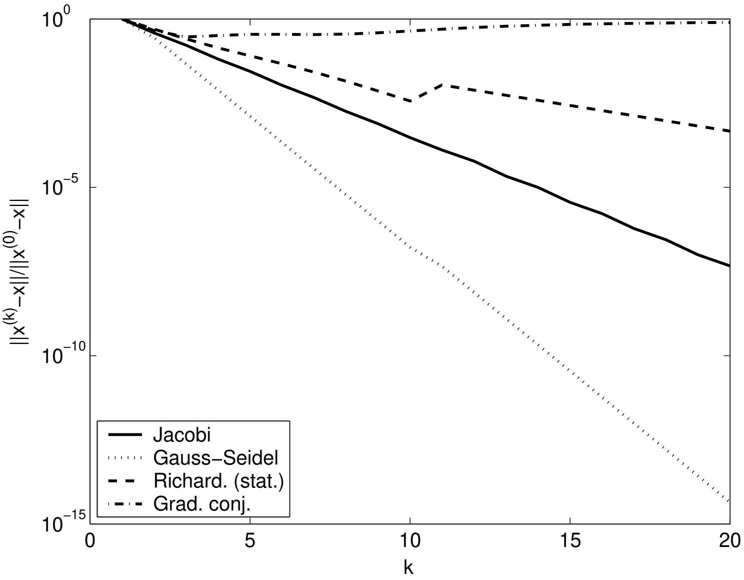
On approche la solution par une méthode itérative en partant de

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La figure qui suit montre la valeur de $\dfrac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|}$ pour les méthodes de Jacobi, de Gauss-Seidel, de Richardson stationnaire préconditionné avec $\alpha = 0.5$ et $P = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et du gradient conjugué préconditionné avec $P = D$.

À noter que cette fois-ci, la méthode du gradient conjugué préconditionné ne converge pas.

Comportement de l'erreur relative pour différentes méthodes itératives appliquées au système (2) :



Critères de convergence

On a la relation suivante :
Si A est une matrice symétrique définie positive, alors

$$\boxed{\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A)\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}.} \qquad (3)$$

L'erreur relative à la k-ième itération peut être majorée par le résidu relatif multiplié par le conditionnement de A.
En particulier, si $K(A) \approx 1$, une petite valeur de la norme du résidu correspond à une petite valeur de la norme de l'erreur ; si $K(A) \gg 1$, cette relation peut être fausse.
On a également une estimation (utilisée si $P \neq I$) :

$$\boxed{\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(P^{-1}A)\frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}.}$$