

Analyse Numérique SV

Systèmes Linéaires

Méthodes itératives

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025



Formulation du problème

On appelle **système linéaire d'ordre n** (n entier positif), une expression de la forme

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

où $A = (a_{ij})$ est **une matrice** de taille $n \times n$ **donnée**, $\mathbf{b} = (b_j)$ est un **vecteur** colonne également **donné** et $\mathbf{x} = (x_j)$ est le **vecteur des inconnues** du système. La relation précédente équivaut aux n équations

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

La matrice A est dite **régulière (non singulière)** si $\det(A) \neq 0$. On a **l'existence et l'unicité** de la solution \mathbf{x} (pour n'importe quel vecteur \mathbf{b} donné) si et seulement si la matrice associée au système linéaire est régulière.

Sommaire méthodes itératives

- Méthodes itératives : définitions
- Méthode de Richardson
- Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel
Critères de convergence
- Méthodes du Gradient et du Gradient Conjugués
Critères de convergence

Méthodes itératives

Résoudre un système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par une méthode itérative consiste à construire une suite de vecteurs $\mathbf{x}^{(k)}$, $k \geq 0$, de \mathbb{R}^n qui converge vers la solution exacte \mathbf{x} , c'est-à-dire :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

pour n'importe quelle donnée initiale $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

On peut considérer la relation de récurrence suivante :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k \geq 0 \tag{1}$$

où B est une matrice bien choisie (dépendante de A) et \mathbf{g} est un vecteur (dépendant de A et de \mathbf{b}), qui vérifient la relation (de consistance)

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{g}. \tag{2}$$

Méthodes itératives I

Méthodes itératives II

Critère de convergence suffisant et nécessaire

On peut montrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{0}$ pour tout $\mathbf{e}^{(0)}$ (et donc pour tout $\mathbf{x}^{(0)}$) si et seulement si

$$\rho(B) < 1,$$

où $\rho(B)$ est le *rayon spectral* de la matrice B , défini par

$$\rho(B) = \max |\lambda_i(B)|$$

et $\lambda_i(B)$ sont les valeurs propres de la matrice B .

Plus la valeur de $\rho(B)$ est petite, moins il est nécessaire d'effectuer d'itérations pour réduire l'erreur initiale d'un facteur donné. Plus précisément :

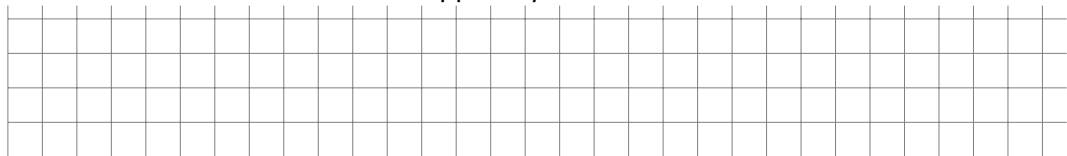
$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\| \leq \rho(B) \|\mathbf{e}^{(k)}\| \quad \text{et donc} \quad \|\mathbf{e}^{(k+1)}\| \leq \rho(B)^{k+1} \|\mathbf{e}^{(0)}\|, \quad k = 0, 1, \dots$$

Construction d'une méthode itérative I

Une approche générale pour construire une méthode itérative est basée sur la décomposition de la matrice A :



où P est une matrice inversible appelée *préconditionneur* de A . Alors,



qui est de la forme (2) en posant

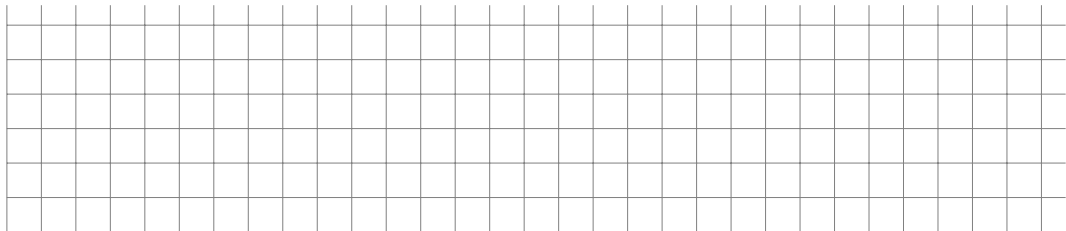
$$B = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A \quad \text{et} \quad \mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{b}.$$

La méthode itérative est construite en remplaçant

$$P\mathbf{x} = (P - A)\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \text{par} \quad P\mathbf{x}^{(k+1)} = (P - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

Construction d'une méthode itérative II

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = (P - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad P\mathbf{x}^{(k+1)} - P\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$$



On peut généraliser cette méthode de la manière suivante :

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

où $\alpha_k \neq 0$ est un paramètre pour améliorer la convergence de la suite $\mathbf{x}^{(k)}$.

La méthode de Richardson préconditionnée

Richardson préconditionnée

Soit $\mathbf{x}^{(0)}$ donné, $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$:

trouvez $\mathbf{z}^{(k)}$ tel que $P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ (3)

choisissez α_k

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)}$$

La méthode de Jacobi

Si les éléments diagonaux de A sont non nuls, on peut poser $P_J = D$, la partie diagonale de A .

On déduit alors :

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - (A - D)\mathbf{x}^{(k)} \quad k \geq 0.$$

Par composantes :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

La méthode de Jacobi peut s'écrire sous la forme générale $\mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$,

avec $B = B_J = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A$, et $\mathbf{g} = \mathbf{g}_J = D^{-1}\mathbf{b}$.

La méthode de Gauss-Seidel

Prenons $\alpha = 1$ et P_{GS} la partie triangulaire inférieure de A avec la diagonale.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

On peut écrire cette méthode sous la forme (3), avec la matrice d'itération $B = B_{GS}$ donnée par

$$B_{GS} = P_{GS}^{-1}(P_{GS} - A) \text{ et } \mathbf{g}_{GS} = P_{GS}^{-1}\mathbf{b}.$$

Critères de convergence

On a la relation suivante :

Si A est une matrice *symétrique définie positive*, alors

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A) \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \quad (5)$$

L'erreur relative à la k -ième itération peut être majorée par le résidu relatif multiplié par le conditionnement de A .

En particulier, si $K(A) \approx 1$, une petite valeur de la norme du résidu correspond à une petite valeur de la norme de l'erreur ; si $K(A) \gg 1$, cette relation peut être fausse.

On a également une estimation (utilisée si $P \neq I$) :

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(P^{-1}A) \frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}.$$

Convergence : conditions suffisantes

- Condition nécessaire et suffisante : $\rho(B) < 1$.
- Si A est une matrice à *diagonale dominante stricte* par ligne, c'est-à-dire

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, \dots, n; j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes

- Soit A *régulière, tridiagonale et dont les coefficients diagonaux sont tous non-nuls*. Alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont toutes les deux soit divergentes soit convergentes. Dans le deuxième cas, $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$
- Si A est une matrice *symétrique définie positive*, alors la méthode de Gauss-Seidel converge (la méthode de Jacobi pas forcément).

La méthode de Richardson Préconditionnée

Richardson préconditionnée

Soit $\mathbf{x}^{(0)}$ donné, $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$:

trouvez $\mathbf{z}^{(k)}$ tel que $P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ (3)

choisissez α_k

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)}.$$

Cette méthode est appelée

- méthode de Richardson stationnaire preconditionnée si $\alpha_k = \alpha$ (une constante donnée) ;
- autrement elle est dite méthode de Richardson dynamique preconditionnée quand α_k peut varier au cours des itérations.

La matrice inversible P est appelée *preconditionneur* de A .

Richardson : choix de α_k

Si A et P sont **symétriques définies positives**, alors on a deux critères optimaux pour le choix de α_k :

1. *Cas stationnaire* :

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

où λ_{min} et λ_{max} désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice $P^{-1}A$.

2. *Cas dynamique* :

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A \mathbf{z}^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

où $\mathbf{z}^{(k)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$ est le résidu préconditionné.

Cette méthode est aussi appelée **méthode du gradient préconditionné**.

La méthode de Richardson non-préconditionnée

Si $P = I$ et A est symétrique définie positive, alors les critères optimaux sont :

■ cas stationnaire :

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(A) + \lambda_{max}(A)}.$$

■ cas dynamique, appelé méthode du gradient si :

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{r}^{(k)})^T A \mathbf{r}^{(k)}},$$

Algorithme du Gradient préconditionné

On peut réécrire plus efficacement la méthode du gradient préconditionné de la manière suivante : soit $\mathbf{x}^{(0)}$, poser $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$, puis pour $k = 0, 1, \dots$,

$$\begin{aligned} P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\ \alpha_k &= \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A\mathbf{z}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)}. \end{aligned}$$

On observe qu'on doit résoudre un système linéaire pour la matrice P à chaque itération ; donc P doit être telle que la résolution du système associé soit facile (c'est-à-dire avec un coût raisonnable). Par exemple, on pourra choisir P diagonale ou triangulaire.

Convergence de la méth. de Richardson

Considérons tout d'abord les méthodes de Richardson stationnaires ; on a le résultat de convergence suivant :

Théorème (Cas stationnaire)

On suppose la matrice P inversible et les valeurs propres de $P^{-1}A$ strictement positives et telles que $\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{min} > 0$. Alors la méthode de Richardson stationnaire est convergente si et seulement si $0 < \alpha < 2/\lambda_1$. De plus, le rayon spectral de la matrice d'itération R_α est minimal si $\alpha = \alpha_{opt}$

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}},$$

avec

$$\rho_{opt} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$$

Dans le cas dynamique, on a un résultat qui permet de choisir de façon optimale le paramètre d'accélération à chaque étape, si les matrices A et P sont symétriques définies positives :

Théorème (Cas dynamique)

Si A est symétrique définie positive, le choix optimal de α_k est donné par

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)})}{(A\mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)})}, \quad k \geq 0$$

où

$$\mathbf{z}^{(k)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}.$$

Si on choisit les coefficients α de manière optimale, pour les cas stationnaire et dynamique, on peut démontrer que, si A et P sont symétriques définies positives, la suite $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ donnée par la méthode de Richardson (stationnaire et dynamique) converge vers \mathbf{x} lorsque $k \rightarrow \infty$, et

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad k \geq 0,$$

où $\|\mathbf{v}\|_A = \sqrt{\mathbf{v}^T A \mathbf{v}}$ et $K(P^{-1}A)$ est le conditionnement de la matrice $P^{-1}A$,

$$K(C) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(C^T C)}{\lambda_{\min}(C^T C)}} \quad \text{Si } C \text{ sdp, } K(C) = \frac{\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\min}(C)}$$

Remarque. Dans le cas de la méthode du gradient ou de Richardson stationnaire (sans préconditionneur) l'estimation de l'erreur devient

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{K(A) - 1}{K(A) + 1} \right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad k \geq 0.$$

Remarque. Si A et P sont symétriques définies positives, on a

$$K(P^{-1}A) = \frac{\lambda_{\max}(P^{-1}A)}{\lambda_{\min}(P^{-1}A)}.$$

La méthode du gradient conjugué

Une méthode encore plus rapide dans le cas où P et A sont **symétriques définies positives** est celle du **gradient conjugué préconditionné** qui s'exprime ainsi :
 soit $\mathbf{x}^{(0)}$ une donnée initiale ; on calcule $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{z}^{(0)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(0)}$,
 $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{z}^{(0)}$, puis pour $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{\mathbf{p}^{(k)T} \mathbf{r}^{(k)}}{\mathbf{p}^{(k)T} A \mathbf{p}^{(k)}} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{p}^{(k)} \\ P \mathbf{z}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k+1)} \\ \beta_k &= \frac{(A \mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{z}^{(k+1)}}{(A \mathbf{p}^{(k)})^T \mathbf{p}^{(k)}} \\ \mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)} .\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'estimation de l'erreur est donnée par

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A, \quad k \geq 0 \quad \text{où} \quad c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}. \quad (6)$$

