Analyse Numérique SV

Intégration numérique

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

Exemples et motivations

L'intégration est un des problèmes les plus importants que l'on rencontre en analyse. Souvent le calcul des intégrales par des méthodes analytiques s'avère très compliqué, voire impossible, car il n'existe pas d'expression analytique de la primitive de la fonction à intégrer. Voici quelques exemples :

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx, \qquad \int_0^1 \cos x^2\,dx.$$

Dans ces cas, on peut appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale donnée.

Quelques propriétés de l'intégrale

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx \qquad \text{(linéarité)} \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\right)\frac{b-a}{2} dt \qquad \text{(changement de variable)} \; (2)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \ldots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) dx \text{ avec } a = x_0 < \ldots < x_N = b \; (3)$$

Comment utiliser ces propriétés pour définir une stratégie pour l'approximation d'un intégrale ?

1. Grâce à (2) on définit d'abord une stratégie pour l'approximation d'un intégrale sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. L'équation (3) permet de définir des formules composites.
3. La propriété (1) permet d'exploiter l'algèbre linéaire.

Formule de quadrature sur $[-1, 1]$ I

On cherche à approximer l'intégrale $\int_{-1}^{1} g(t)dt$ d'une fonction continue.

Rappel : **Base de Lagrange :**

- $n+1$ noeuds $-1 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$.
- $n+1$ fonctions de base associées $\{\varphi_0, \ldots \varphi_n\}$

Interpolation de Lagrange : $\Pi_n g(t) = \sum_{j=0}^{n} g(t_j)\varphi_j(t)$

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx \int_{-1}^{1} \Pi_n g(t)dt = \int_{-1}^{1} \sum_{j=0}^{n} g(t_j)\varphi_j(t)dt = \sum_{j=0}^{n} g(t_j) \underbrace{\int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt}_{\omega_j}$$

On pose $M = n+1$ et à l'aide de ces ingrédients on définit les formules de quadrature.

Formule de quadrature sur $[-1, 1]$ II

Définition

Une formule de quadrature $J(\cdot)$ permet d'approcher $\int_{-1}^{1} g(t)dt$ pour une fonction continue $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Étant donné $M > 0$,

- M points d'intégration $-1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_M \leq 1$,
- M poids $\omega_1, \ldots, \omega_M$,

elle s'écrit

$$J(g) = \sum_{j=0}^{n} \omega_j g(t_j).$$

Une formule de quadrature est linéaire (exercice) :

$$J(f + \lambda g) = J(f) + \lambda J(g)$$

Degré d'exactitude I

Définition

Une formule de quadrature J est exacte de degré r si pour tout polynome p de degré $\leq r$ on a $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p)$.

Théorème (Poids de quadrature)

Soit J une formule de quadrature avec M noeuds.

$$J \text{ est exacte de degré } M-1 \iff \omega_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt, \; j = 1, \ldots, M,$$

où $\{\varphi_j, j = 1, \ldots, M\}$ est la base de Lagrange associée aux noeuds de quadrature.

Degré d'exactitude II

Démonstration.

Soient $\omega_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt$, $j = 1, \dots, M$ et p un polynôme de degré $\leq M - 1$. On a que $p(t) = \sum_{j=1}^{M} p(t_j)\varphi_j(t)$ (interpolation de Lagrange) et que

$$\int_{-1}^{1} p(t)dt = \int_{-1}^{1} \sum_{j=1}^{M} p(t_j)\varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{M} p(t_j) \int_{-1}^{1} \varphi_j(t) = \sum_{j=1}^{M} p(t_j)\omega_j = J(p).$$

Soit J exacte de degré $M - 1$. Chaque fonction de la base de Lagrange a degré $\leq M - 1$, donc pour $\ell = 1, \dots, M$ on a

$$\int_{-1}^{1} \varphi_\ell(t)dt = J(\varphi_\ell) = \sum_{j=1}^{M} \varphi_\ell(t_j)\omega_j = \sum_{j=1}^{M} \delta_{j\ell}\omega_j = \omega_\ell.$$

$\square$

Formule de quadrature composite sur $[a, b]$ I

On cherche à approximer l'intégrale $\int_a^b f(x)dt$ d'une fonction continue sur $[a, b]$ en utilisant

- une partition en N sous-intervalles de taille $H = \frac{b-a}{N}$. Avec $x_k = a + kH, k = 0, \ldots, N$ on obtient

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

- le changement de variable

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + t\frac{x_{k+1} - x_k}{2}\right) \frac{x_{k+1} - x_k}{2} dt =$$

$$\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2} + \frac{H}{2}t\right) \frac{H}{2} dt = \frac{H}{2} \int_{-1}^{1} f\left(x_k + \frac{H}{2}(t+1)\right) dt$$

Formule de quadrature composite sur $[a, b]$ II

Définition

La formule de quadrature composite associée à la formule de quadrature J est définie par

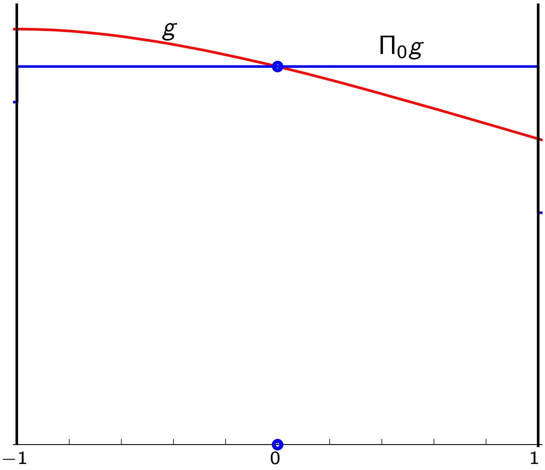
$$L_H(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{N-1} J(g_k) \quad \text{où } g_k(t) = f\left(x_k + \frac{H}{2}(t+1)\right).$$

Par conséquent on a que

$$L_H(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} g_k(t_j)\omega_j = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{M} \omega_j \, f\left(x_k + \frac{H}{2}(t_j+1)\right).$$

Formule du point milieu

$$\boxed{J^{pm}(g) = 2g(0)}$$



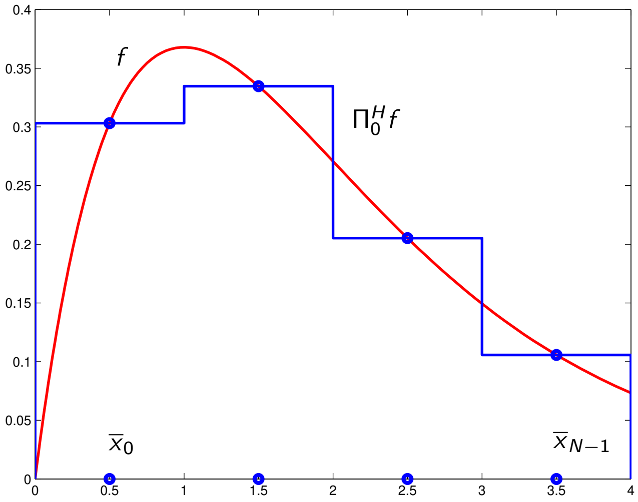
Formule composite du point milieu

Cette formule est obtenue en remplaçant, sur chaque sous-intervalle I_k, la fonction f par un polynôme constant $\Pi_0 f$ égal à la valeur de f au milieu de I_k (voir figure suivante) : on obtient la *formule composite du point milieu*

$$\boxed{I_{pm}^c(f) = H \sum_{k=0}^{N-1} f(\overline{x}_k),}$$

où

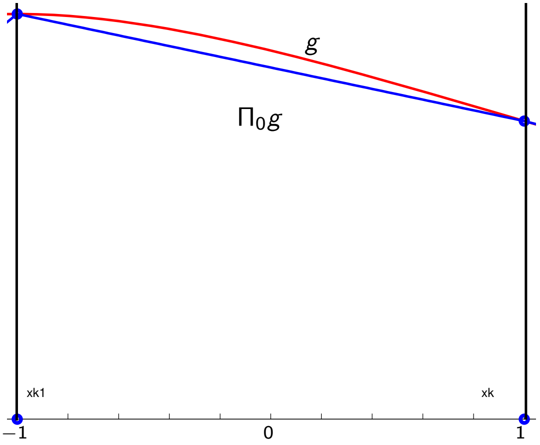
$$\overline{x}_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + kH + \frac{H}{2}.$$



f
$\Pi_0^H f$
$\overline{x}_0$
$\overline{x}_{N-1}$
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

Formule du trapèze

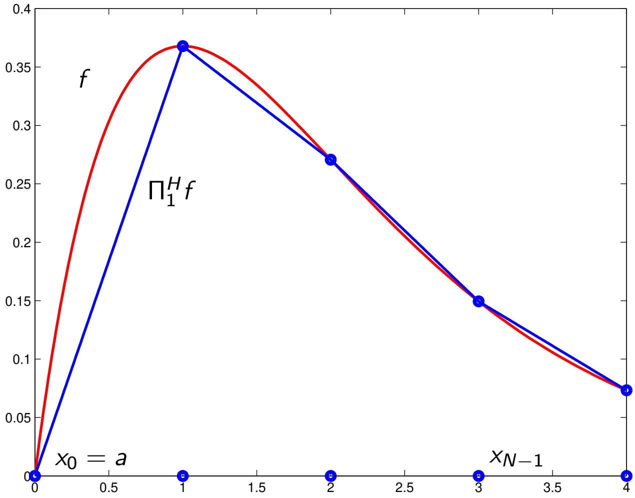
$$\boxed{J^t(g) = 2\frac{g(-1)+g(-1)}{2}}$$



Formule composite du trapèze

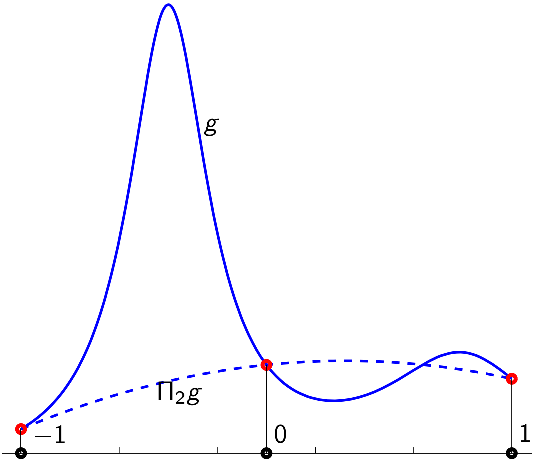
Si, sur chaque sous-intervalle I_k, on remplace f par le polynôme d'interpolation $\Pi_1 f(x)$ de degré 1 aux nœuds x_k et x_{k+1}, on obtient la *formule composite du trapèze* :

$$\boxed{I_t^c(f) = \frac{H}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})] = \frac{H}{2}[f(a)+f(b)] + H\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k).}$$


0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
f
$\Pi_1^H f$
$x_0 = a$
x_{N-1}

Formule de Simpson

$$\boxed{J^s(g) = \frac{H}{6}\left[g(-1) + 4g\,(0) + g(1)\right]}$$



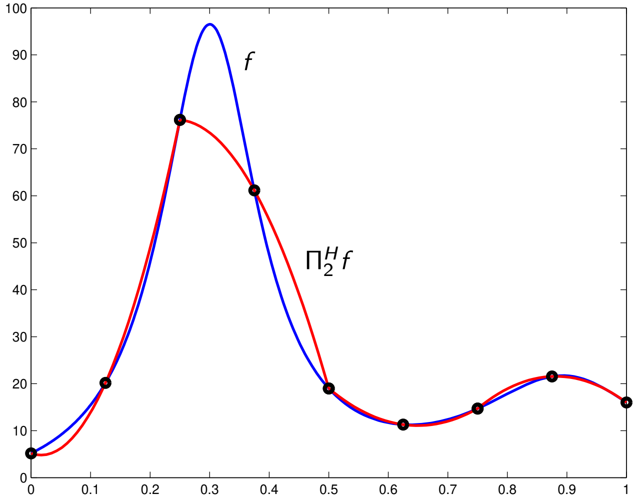
Formule composite de Simpson

La formule de Simpson est obtenue en remplaçant f par son polynôme interpolant composite $\Pi_2^H f(x)$ de degré 2. En particulier, $\Pi_2^H f(x)$ est une fonction continue par morceaux qui, sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, est obtenue comme le polynôme interpolant f aux nœuds

$$x_k,\ \overline{x}_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \text{ et } x_{k+1} \text{ (voir figure suivante).}$$

On obtient donc la *formule composite de Simpson* :

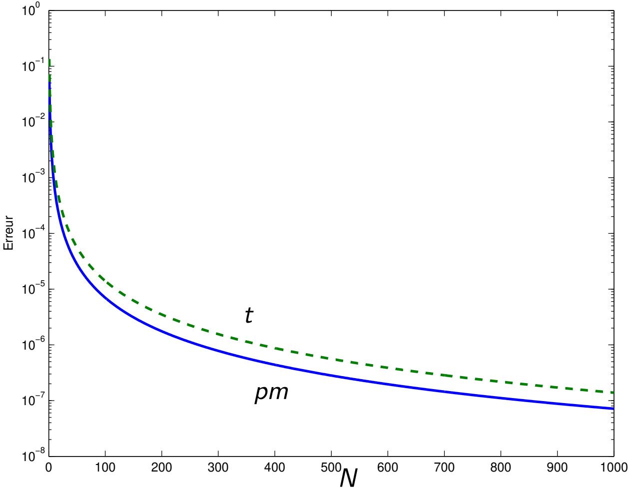
$$\boxed{I_s^c(f) = \frac{H}{6} \sum_{k=0}^{N-1} \left[f(x_k) + 4f(\overline{x}_k) + f(x_{k+1}) \right].}$$



100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
f
$\Pi_2^H f$

Exemple

On considère $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$ où $f(x) = \cos(x^2)$: la figure suivante montre l'erreur d'intégration $|I^c_{pm}(f) - I(f)|$ (formule composite du point milieu) et $|I^c_t(f) - I(f)|$, (formule composite du trapèze) en fonction du nombre de sous-intervalles N.



Erreur d'intégration I

Théorème

Soit J une formule de quadrature exacte de degré $r \geq 0$ et $[a, b]$ un intervalle. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toute $f \in C^{r+1}([a, b])$ on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_H(f) \right| \leq K\, H^{r+1} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{r+1}(x) \right| \quad \text{où } H = \frac{b-a}{N}.$$

Définition

On dit qu'une telle formule de quadrature composite L_H est d'***ordre*** $d = n + 1$ (par rapport à la longueur H des sous-intervalles),

Démonstration.

(pas faite) $\square$

Erreur d'intégration II

- Formule composite du point milieu. Si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{pm}(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{degré exact 1, ordre 2}$$

- Formule composite du trapèze. Si f est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{t}(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{degré exact 1, ordre 2}$$

- Formule composite de Simpson. Si f est dans $C^4([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{s}(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x\in[a,b]} |f''''(x)| \Rightarrow \text{degré exact 3, ordre 4}$$

Démontrons l'estimation pour la formule du point milieu. D'abord, grâce à un développement de Taylor sur l'intervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ autour de $\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, on a

$$\int_{I_k} [f(x) - f(\bar{x}_k)]\, dx = \int_{I_k} f'(\bar{x}_k)(x - \bar{x}_k)dx + \frac{1}{2}\int_{I_k} f''(\xi(x))(x - \bar{x}_k)^2 dx,$$

où $\xi(x) \in I_k$. Par ailleurs, on a

$$\int_{I_k} f'(\bar{x}_k)(x - \bar{x}_k)dx = 0,$$

et, par le théorème de la moyenne pour les intégrales, $\exists \xi_k \in I_k$:

$$\int_{I_k} f''(\xi(x))(x - \bar{x}_k)^2 dx = f''(\xi_k)\int_{I_k} (x - \bar{x}_k)^2 dx = \frac{H^3}{12} f''(\xi_k).$$

Donc :

$$\int_{I_k} [f(x) - f(\bar{x}_k)]\, dx = \frac{H^3}{24} f''(\xi_k).$$

Par conséquent, comme $\Pi_0^H f(x) = f(\bar{x}_k) \forall x \in I_k$, on déduit

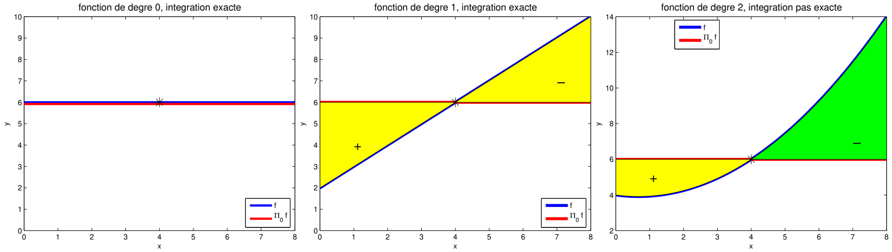
$$|I(f) - I_{pm}^c(f)| = \left| \int_a^b \left[f(x) - \Pi_0^H f(x) \right] dx \right| = \left| \sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} \left[f(x) - \Pi_0^H f(x) \right] dx \right|$$
$$= \left| \sum_{k=1}^{N} \int_{I_k} [f(x) - f(\bar{x}_k)]\, dx \right| \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{H^3}{24} |f''(\xi_k)|.$$

Donc :

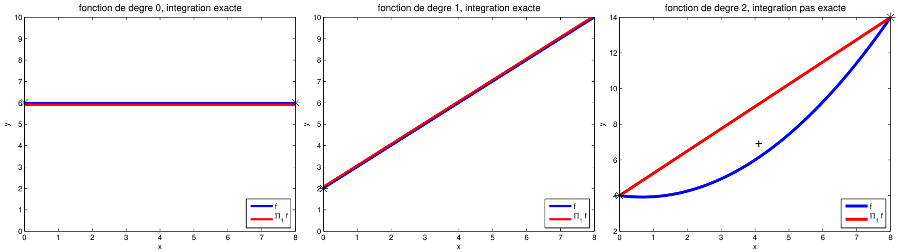
$$|I(f) - I_{pm}^c(f)| \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{H^3}{24} \right) \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$
$$= M \frac{H^3}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = (b-a) \frac{H^2}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|,$$

car $H = \dfrac{b-a}{M}$; c'est bien l'estimation qu'il fallait prouver.

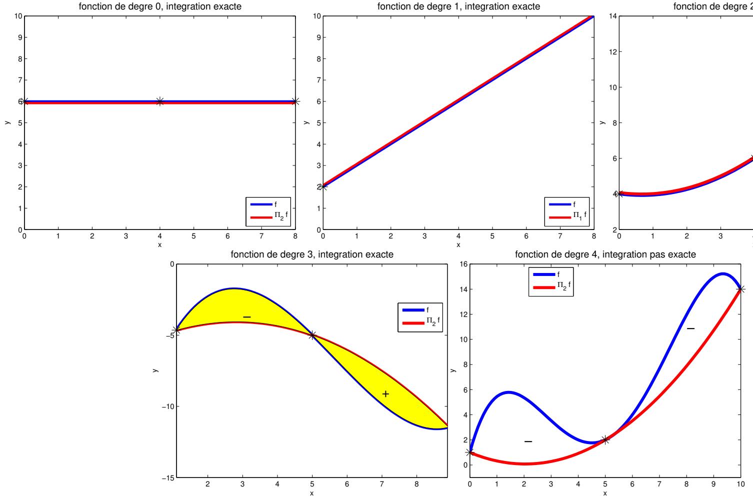
Formule du point milieu



Formule du trapèze



Formule de Simpson



Formules d'ordres élevés

Formules de quadrature de Gauss-Legendre.
Degré d'exactitude $2M - 1$, ordre par rapport à H : $2M$

M	t_j	ω_j
2	$\{\pm 1/\sqrt{3}\}$	$\{1\}$
3	$\{\pm\sqrt{15}/5, 0\}$	$\{5/9, 8/9\}$
4	$\Big\{\pm(1/35)\sqrt{525 - 70\sqrt{30}},$	$\{(1/36)(18 + \sqrt{30}),$
	$\pm(1/35)\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}\Big\}$	$(1/36)(18 - \sqrt{30})\}$
5	$\Big\{0, \pm(1/21)\sqrt{245 - 14\sqrt{70}}$	$\{128/225, (1/900)(322 + 13\sqrt{70})$
	$\pm(1/21)\sqrt{245 + 14\sqrt{70}}\Big\}$	$(1/900)(322 - 13\sqrt{70})\}$

Formules de quadrature de Gauss-Legendre-Lobatto.
Degré d'exactitude $2M - 3$, ordre par rapport à H : $2M - 2$

M	t_j	ω_j
2	$\{\pm 1\}$	$\{1\}$
3	$\{\pm 1, 0\}$	$\{1/3, 4/3\}$
4	$\{\pm 1, \pm\sqrt{5}/5\}$	$\{1/6, 5/6\}$
5	$\{\pm 1, \pm\sqrt{21}/7, 0\}$	$\{1/10, 49/90, 32/45\}$

[Quarteroni, Saleri, Gervasio, Scientific computing]