

Analyse Numérique SV

Intégration numérique

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025



Formule de quadrature sur $[-1, 1]$

Définition

Une **formule de quadrature** $J(\cdot)$ permet d'approcher $\int_{-1}^1 g(t)dt$ pour une fonction continue $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Étant donné $M > 0$,

- M points d'intégration $-1 \leq t_1 < \dots < t_M \leq 1$,
- M poids $\omega_1, \dots, \omega_M$,

elle s'écrit

$$J(g) = \sum_{j=0}^n \omega_j g(t_j).$$

Une formule de quadrature est linéaire (exercice) :

$$J(f + \lambda g) = J(f) + \lambda J(g)$$

Degré d'exactitude

Définition

Une formule de quadrature J est **exacte de degré r** si pour tout polynome p de degré $\leq r$ on a $\int_{-1}^1 p(t)dt = J(p)$.

Théorème (Poids de quadrature)

Soit J une formule de quadrature avec M noeuds.

$$J \text{ est exacte de degré } M - 1 \iff \omega_j = \int_{-1}^1 \varphi_j(t)dt, \quad j = 1, \dots, M,$$

où $\{\varphi_j, j = 1, \dots, M\}$ est la base de Lagrange associée aux noeuds de quadrature.

Formule de quadrature composite sur $[a, b]$

Définition

La formule de quadrature composite associée à la formule de quadrature J est définie par

$$L_H(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{N-1} J(g_k) \quad \text{où } g_k(t) = f\left(x_k + \frac{H}{2}(t+1)\right).$$

Par conséquent on a que

$$L_H(f) = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M g_k(t_j) \omega_j = \frac{H}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^M \omega_j f\left(x_k + \frac{H}{2}(t_j+1)\right).$$

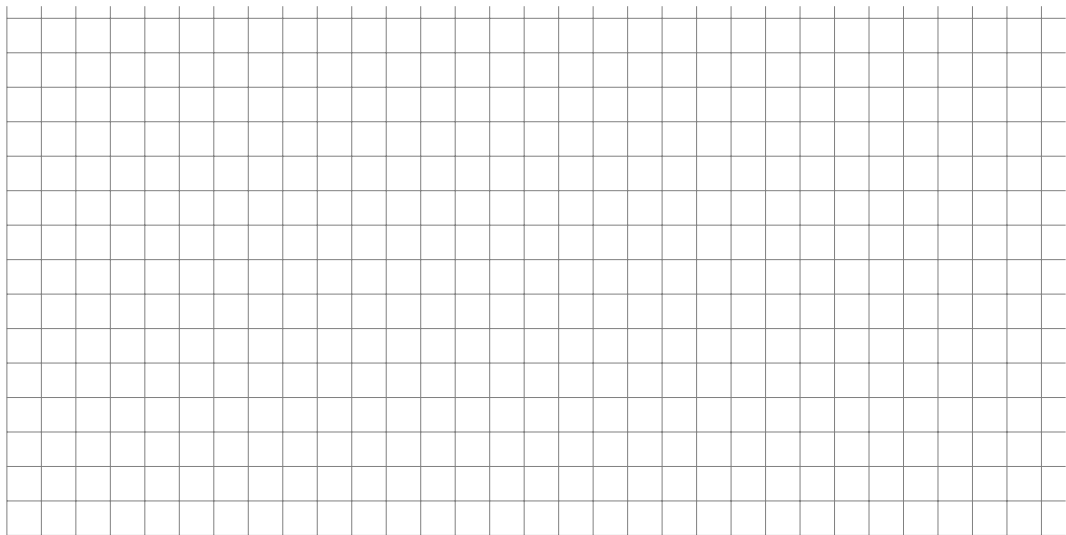
Quelques rappels I

Considérons la formule de quadrature définie par $J(g) = \sum_{j=1}^M \omega_j g(t_j)$, les poids étant calculés avec la formule du théorème. Que vaut la somme des poids

$$\sum_{j=1}^M \omega_j?$$

- A 0
- B 0.5
- C 1
- D 1.5
- E 2
- F 2.5

Quelques rappels II



Quelques rappels III

Soit $-1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1$ trois points d'intégration, on considère la formule de quadrature $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2) + \omega_3 g(t_3)$, où les poids $\omega_j = \int_{-1}^1 \varphi_j(t) dt$, $j = 1, 2, 3$. D'après le théorème, la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré 2. Soit $p_3 \in \mathbb{P}_3$, on peut écrire $p_3(t) = p_2(t) + at^3$, où $p_2 \in \mathbb{P}_2$ et $a \in \mathbb{R}$. On a :

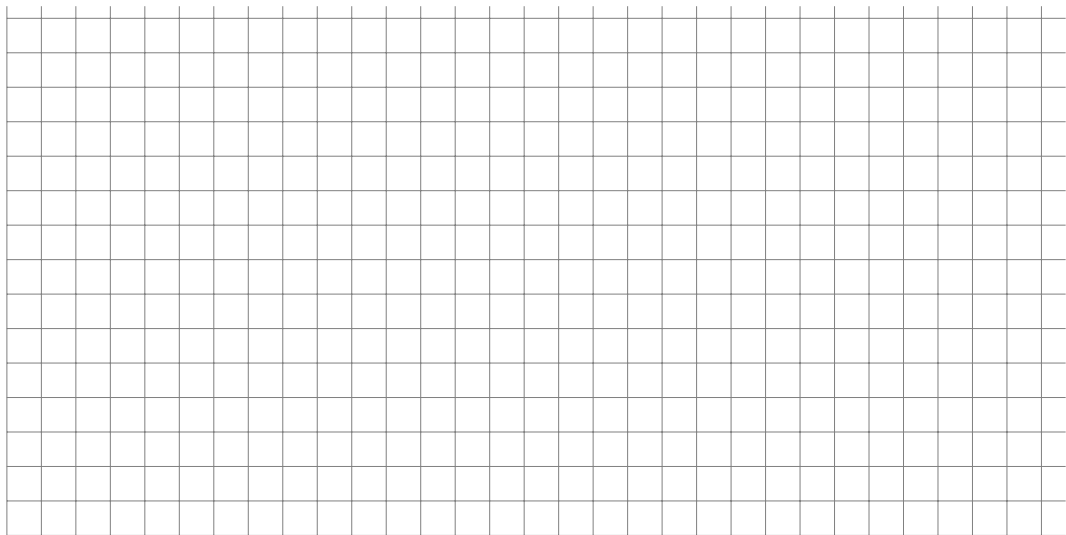
$$\text{A} \quad \int_{-1}^1 p_2(t) dt = J(p_2)$$

$$\text{B} \quad \int_{-1}^1 p_3(t) dt = J(p_3)$$

$$\text{C} \quad \int_{-1}^1 p_3(t) dt = \int_{-1}^1 p_2(t) dt + a \int_{-1}^1 t^3 dt$$

$$\text{D} \quad \left(\int_{-1}^1 p_3(t) dt = J(p_3) \right) \Leftrightarrow \left(\int_{-1}^1 t^3 dt = J(t^3) \right).$$

Quelques rappels IV



Quelques rappels V

Soit $-1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_M \leq 1$, M points d'intégration, on considère la formule de quadrature $J(g) = \sum_{j=1}^M \omega_j g(t_j)$, où les poids $\omega_j = \int_{-1}^1 \varphi_j(t) dt$, $j = 1, \dots, M$. D'après le théorème 3.2, la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré $M - 1$. Soit $p_M \in \mathbb{P}_M$, on peut écrire $p_M(t) = p_{M-1}(t) + at^M$, où $p_{M-1} \in \mathbb{P}_{M-1}$ et $a \in \mathbb{R}$. On a :

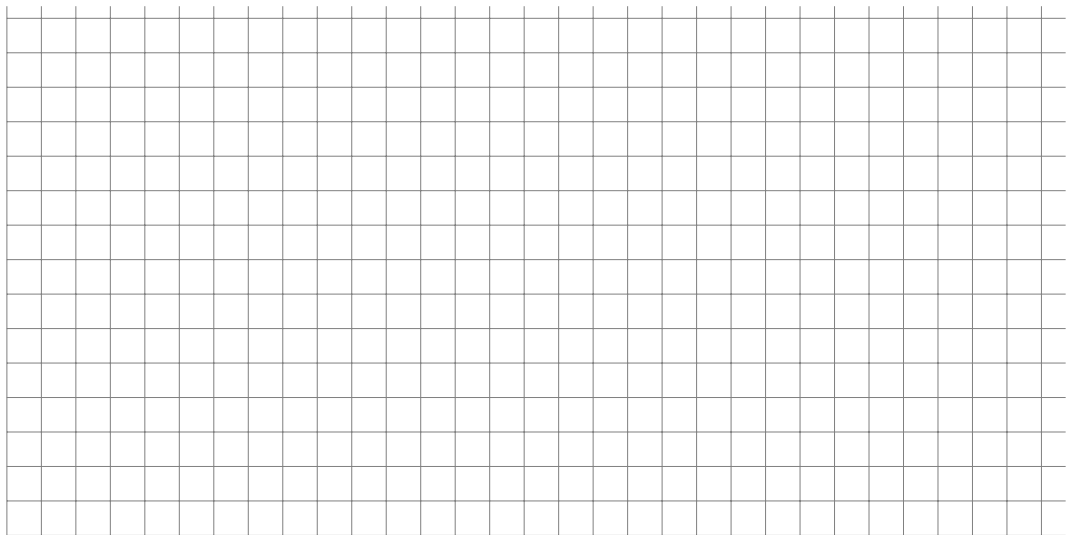
$$\text{A} \quad \int_{-1}^1 p_{M-1}(t) dt = J(p_{M-1})$$

$$\text{B} \quad \int_{-1}^1 p_M(t) dt = J(p_M)$$

$$\text{C} \quad \int_{-1}^1 p_M(t) dt = \int_{-1}^1 p_{M-1}(t) dt + a \int_{-1}^1 t^M dt$$

$$\text{D} \quad \left(\int_{-1}^1 p_M(t) dt = J(p_M) \right) \Leftrightarrow \left(\int_{-1}^1 t^M dt = J(t^M) \right).$$

Quelques rappels VI



Quelques rappels VII

Soit $0 < \alpha \leq 1$, on pose $t_1 = -\alpha$, $t_2 = \alpha$ et on considère la formule de quadrature $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2)$. On pose $\omega_j = \int_{-1}^1 \varphi_j(t) dt$, $j = 1, 2$, où φ_1, φ_2 est la base de Lagrange de \mathbb{P}_1 associée à t_1, t_2 . On a :

A $\omega_1 = \omega_2 = 1$

B $J(p) = \int_{-1}^1 p(t) dt, \forall p \in \mathbb{P}_1.$

C $J(p) = \int_{-1}^1 p(t) dt, \forall p \in \mathbb{P}_2, \forall 0 < \alpha \leq 1.$

D $\left(J(p) = \int_{-1}^1 p(t) dt, \forall p \in \mathbb{P}_2 \right) \Leftrightarrow \left(\alpha = 1/\sqrt{3} \right).$

E Si $\alpha = 1/\sqrt{3}$ alors $J(p) = \int_{-1}^1 p(t) dt, \forall p \in \mathbb{P}_3.$

Quelques rappels VIII



Erreur d'intégration I

Théorème

Soit J une formule de quadrature exacte de degré $r \geq 0$ et $[a, b]$ un intervalle. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toute $f \in C^{r+1}([a, b])$ on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - L_H(f) \right| \leq K H^{r+1} \max_{x \in [a, b]} |f^{(r+1)}(x)| \quad \text{où } H = \frac{b-a}{N}.$$

Définition

On dit qu'une telle formule de quadrature composite L_H est d'**ordre** $d = r + 1$ (par rapport à la longueur H des sous-intervalles),

Preuve : (pas faite, Exercice)



Erreur d'intégration II

- Formule composite du point milieu. Si f est dans $C^2([a, b])$, alors

$$|I(f) - I_{pm}^c(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{degré exact 1, ordre 2}$$

- Formule composite du trapèze. Si f est dans $C^2([a, b])$, alors

$$|I(f) - I_t^c(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{degré exact 1, ordre 2}$$

- Formule composite de Simpson. Si f est dans $C^4([a, b])$, alors

$$|I(f) - I_s^c(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| \Rightarrow \text{degré exact 3, ordre 4}$$

Exercice 1 I

On veut approximer l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

en sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

- a) Calculer une valeur approchée de cette intégrale en utilisant la formule simple du trapèze sur l'intervalle $[0, 3]$.

Exercice 1 II

- b) Pour avoir plus de précision, on divise l'intervalle $[0, 3]$ en N sous-intervalles égaux $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de longueur $H = x_k - x_{k-1} = 3/N$, $k = 1, \dots, N$, avec $x_0 = 0$ et $x_N = 3$, et on considère la formule composite du trapèze. On peut montrer que l'erreur commise par la formule simple du trapèze

$$I_{t,(k)}(f) = \frac{H}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \text{ sur l'intervalle } I_k \text{ est}$$

$$E_{(k)}^t = \left| \int_{I_k} f(x) dx - I_{t,(k)}^c(f) \right| \leq \frac{H^3}{12} \max_{\xi \in I_k} |f''(\xi)| \quad \text{si } f \in C^2.$$

Estimer, en fonction du nombre N de sous-intervalles, l'erreur globale

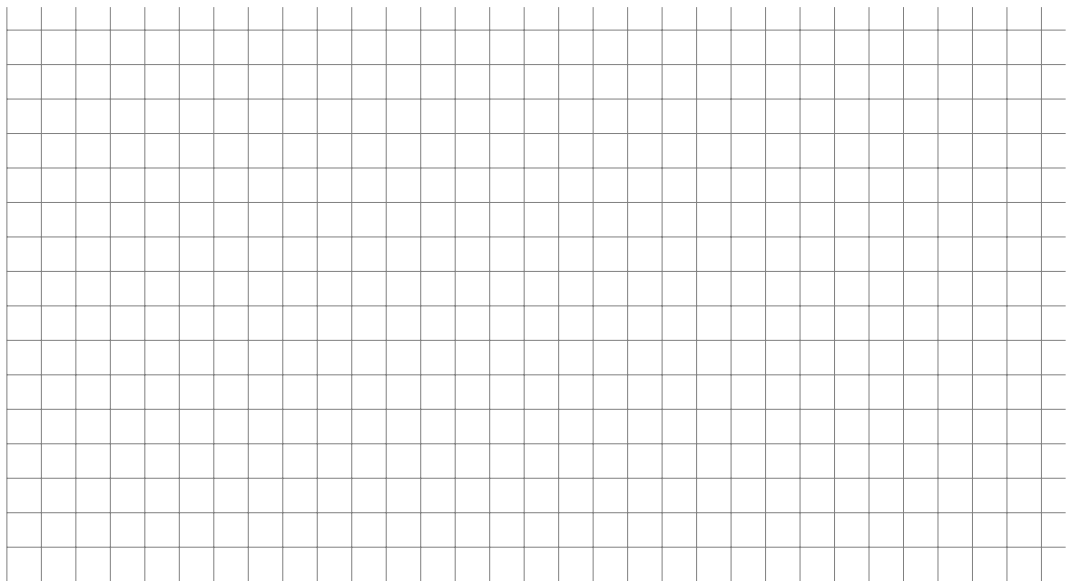
$$E_t^c = \left| \int_0^1 f(x) dx - I_t^c(f) \right|$$

introduite par la formule composite du trapèze $I_t^c(f) = \sum_{k=1}^N I_{t,(k)}(f)$ sur l'intervalle $[0, 3]$.

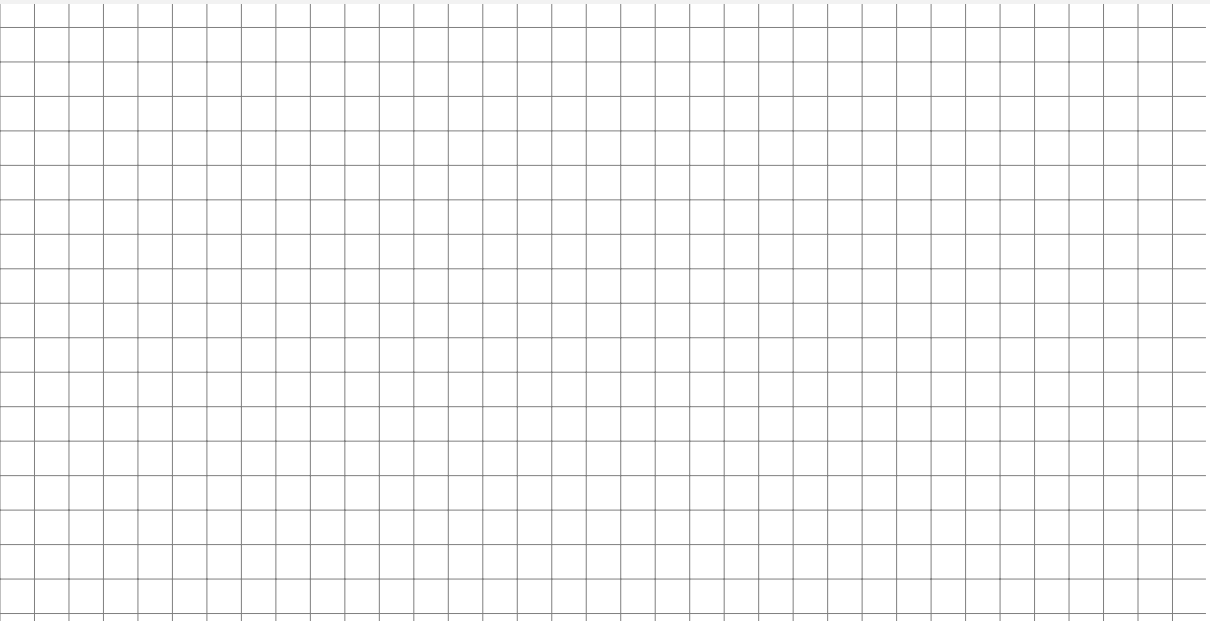
Exercice 1 III

- c) Trouver le nombre minimal N de sous-intervalles afin que l'erreur globale soit plus petite que 10^{-4} .

Exercice 1 IV



Exercice 1, solution



Exercice 2 I

On considère une fonction $f \in C^2([a, b])$.

- a) Soient $p_1, p_2 \in [a, b]$, $p_1 < p_2$; à l'aide de l'expansion de Taylor autour du point $p = (p_1 + p_2)/2$, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(p) + (x - p)f'(p) + \frac{1}{2}(x - p)^2 f''(\eta(x)),$$

où $\eta(x)$ est compris entre x et p , montrer l'estimation suivante :

$$\left| \int_{p_1}^{p_2} f(x) dx - (p_2 - p_1)f(p) \right| \leq \frac{(p_2 - p_1)^3}{24} \max_{x \in [p_1, p_2]} |f''(x)|.$$

Exercice 2 II

- b) Considérer la subdivision de $I = [a, b]$ en M sous-intervalles équirepartis $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de longueur $H = (b - a)/M$, où $x_k = a + kH$, $k = 1, \dots, M$. Soit

$$I_{mp}^c(f) = H \sum_{k=1}^M f(\bar{x}_k),$$

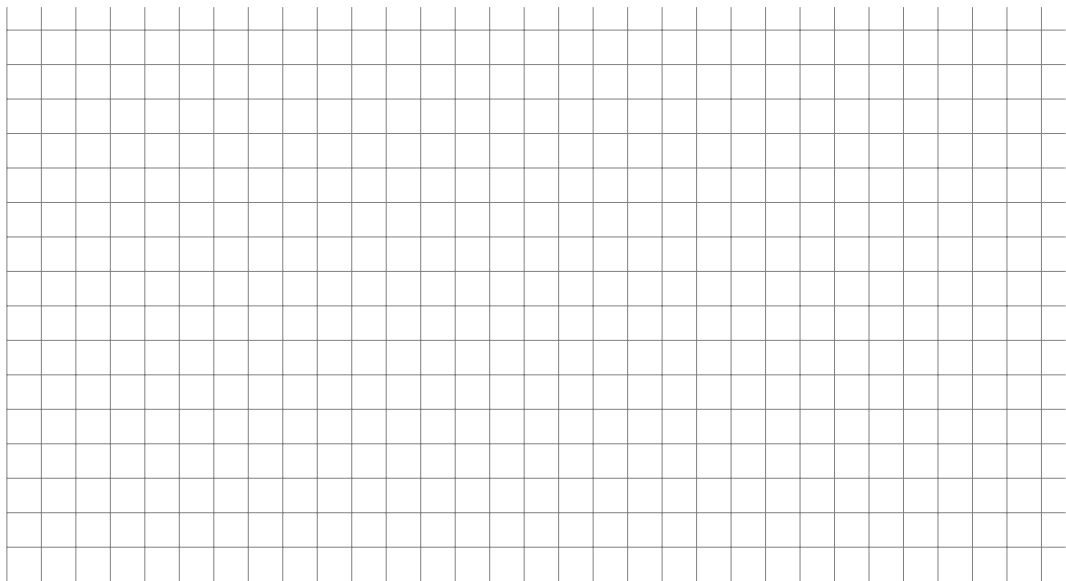
la valeur approchée de l'intégrale de f sur I par la formule composite du point milieu, où $\bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$. En appliquant le résultat du point a) à chaque sous-intervalle I_k montrer l'estimation de l'erreur suivante :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - I_{mp}^c(f) \right| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

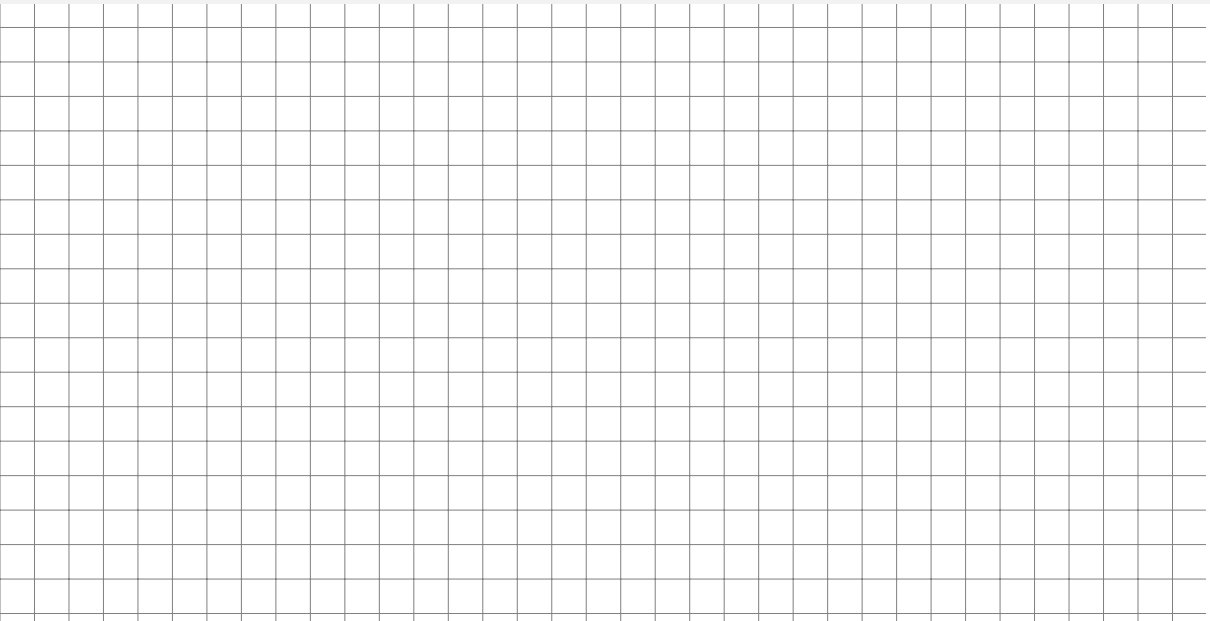
Exercice 2 III

- c) Soit $f(x) = e^{x^2}$; on veut calculer $\int_0^1 f(x)dx$. Calculer le nombre de sous-intervalles nécessaires pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale avec une erreur de 10^{-6} avec la formule composite du point milieu.

Exercice 2 IV



Exercice 2, solution



Exercice 3 I

On veut calculer numériquement l'intégrale de la fonction $f(x) = e^{-x/5}$ sur l'intervalle $[0, 5]$. Pour cela, on divise l'intervalle $[0, 5]$ en m sous-intervalles égaux et on considère les formules composites du trapèze et de Simpson.

- a) En sachant que l'erreur commise par la formule du trapèze I_i^T sur un intervalle $[x_i, x_i + h]$ de longueur h est

$$E_i^T = \left| \int_{x_i}^{x_i+h} f(t) dt - I_i^T(f) \right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{\xi \in [x_i, x_i+h]} |f^{(2)}(\xi)|$$

et que l'erreur commise par celle de Simpson est

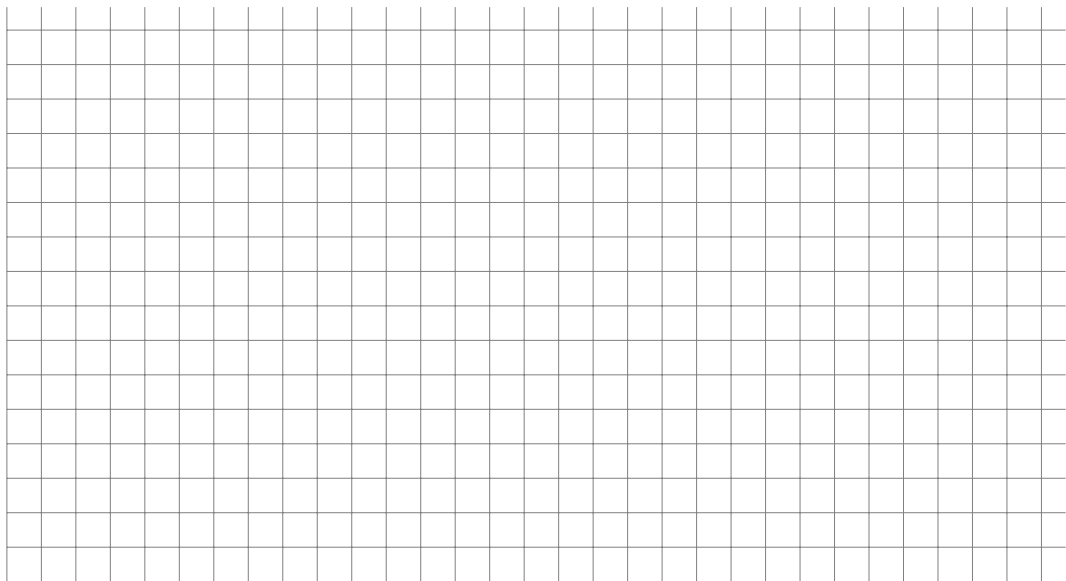
$$E_i^S = \left| \int_{x_i}^{x_i+h} f(t) dt - I_i^S(f) \right| \leq \frac{h^5}{90} \max_{\xi \in [x_i, x_i+h]} |f^{(4)}(\xi)| ,$$

Exercice 3 II

où f est une fonction suffisamment régulière, calculer les erreurs globales E_h^T et E_h^S introduites par les deux formules composites correspondantes I_h^T et I_h^S en fonction du nombre de sous-intervalles.

- b) Trouver le nombre minimal m de sous-intervalles pour que l'erreur globale soit $\leq 10^{-4}$ dans les deux cas.

Exercice 3 III



Exercice 3, solution

