# Analyse Numérique SV

# Intégration numérique

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025

# Formule de quadrature sur $[-1, 1]$

## Définition

Une formule de quadrature $J(\cdot)$ permet d'approcher $\int_{-1}^{1} g(t)dt$ pour une fonction continue $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Étant donné $M > 0$,

- $M$ points d'intégration $-1 \leq t_1 < \cdots < t_M \leq 1$,
- $M$ poids $\omega_1, \ldots, \omega_M$,

elle s'écrit

$$J(g) = \sum_{j=0}^{n} \omega_j g(t_j).$$

Une formule de quadrature est linéaire (exercice) :

$$J(f + \lambda g) = J(f) + \lambda J(g)$$

# Degré d'exactitude

### Définition

Une formule de quadrature $J$ est exacte de degré $r$ si pour tout polynome $p$ de degré $\leq r$ on a $\int_{-1}^{1} p(t)dt = J(p)$.

### Théorème (Poids de quadrature)

*Soit $J$ une formule de quadrature avec $M$ noeuds.*

$$J \text{ est exacte de degré } M-1 \iff \omega_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt, \ j = 1, \ldots, M,$$

*où $\{\varphi_j, j = 1, \ldots, M\}$ est la base de Lagrange associée aux noeuds de quadrature.*

# Formule de quadrature composite sur $[a, b]$

## Définition

La formule de quadrature composite associée à la formule de quadrature $J$ est définie par

$$L_H(f) = \frac{H}{2}\sum_{k=0}^{N-1} J(g_k) \quad \text{où } g_k(t) = f\left(x_k + \frac{H}{2}(t+1)\right).$$

Par conséquent on a que

$$L_H(f) = \frac{H}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} g_k(t_j)\omega_j = \frac{H}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} \omega_j\, f\left(x_k + \frac{H}{2}(t_j+1)\right).$$

# Quelques rappels I

Considérons la formule de quadrature définie par $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$, les poids étant calculés avec la formule du théorème. Que vaut la somme des poids

$$\sum_{j=1}^{M} \omega_j ?$$

- A 0
- B 0.5
- C 1
- D 1.5
- E 2
- F 2.5

# Quelques rappels II

# Quelques rappels III

Soit $-1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1$ trois points d'intégration, on considère la formule de quadrature $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2) + \omega_3 g(t_3)$, où les poids $\omega_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt$, $j = 1, 2, 3$. D'après le théorème, la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré $2$. Soit $p_3 \in \mathbb{P}_3$, on peut écrire $p_3(t) = p_2(t) + at^3$, où $p_2 \in \mathbb{P}_2$ et $a \in \mathbb{R}$. On a :

A $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_2(t)dt = J(p_2)$

B $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_3(t)dt = J(p_3)$

C $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_3(t)dt = \int_{-1}^{1} p_2(t)dt + a\int_{-1}^{1} t^3dt$

D $\displaystyle\left(\int_{-1}^{1} p_3(t)dt = J(p_3)\right) \Leftrightarrow \left(\int_{-1}^{1} t^3dt = J(t^3)\right)$.

# Quelques rappels IV

# Quelques rappels V

Soit $-1 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_M \leq 1$, M points d'intégration, on considère la formule de quadrature $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$, où les poids $\omega_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt$, $j = 1, \ldots, M$. D'après le théorème 3.2, la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré $M-1$. Soit $p_M \in \mathbb{P}_M$, on peut écrire $p_M(t) = p_{M-1}(t) + at^M$, où $p_{M-1} \in \mathbb{P}_{M-1}$ et $a \in \mathbb{R}$. On a :

A $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_{M-1}(t)dt = J(p_{M-1})$

B $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_M(t)dt = J(p_M)$

C $\displaystyle\int_{-1}^{1} p_M(t)dt = \int_{-1}^{1} p_{M-1}(t)dt + a\int_{-1}^{1} t^M dt$

D $\displaystyle\left(\int_{-1}^{1} p_M(t)dt = J(p_M)\right) \Leftrightarrow \left(\int_{-1}^{1} t^M dt = J(t^M)\right)$.

# Quelques rappels VI

# Quelques rappels VII

Soit $0 < \alpha \leq 1$, on pose $t_1 = -\alpha$, $t_2 = \alpha$ et on considère la formule de quadrature $J(g) = \omega_1 g(t_1) + \omega_2 g(t_2)$. On pose $\omega_j = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)dt$, $j = 1, 2$, où $\varphi_1, \varphi_2$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_1$ associée à $t_1, t_2$. On a :

- A $\omega_1 = \omega_2 = 1$
- B $J(p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)dt, \forall p \in \mathbb{P}_1$.
- C $J(p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)dt, \forall p \in \mathbb{P}_2, \forall 0 < \alpha \leq 1$.
- D $\left( J(p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)dt, \forall p \in \mathbb{P}_2 \right) \Leftrightarrow \left( \alpha = 1/\sqrt{3} \right)$.
- E Si $\alpha = 1/\sqrt{3}$ alors $J(p) = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(t)dt, \forall p \in \mathbb{P}_3$.

# Quelques rappels VIII

# Erreur d'intégration I

## Théorème

*Soit $J$ une formule de quadrature exacte de degré $r \geq 0$ et $[a, b]$ un intervalle. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toute $f \in C^{r+1}([a, b])$ on a*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_H(f) \right| \leq K\, H^{r+1} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(r+1)}(x) \right| \quad \textit{où } H = \frac{b-a}{N}.$$

## Définition

On dit qu'une telle formule de quadrature composite $L_H$ est d'***ordre*** $d = r + 1$ (par rapport à la longueur $H$ des sous-intervalles),

**Preuve :** (pas faite, Exercice) □

# Erreur d'intégration II

- Formule composite du point milieu. Si $f$ est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{pm}(f)| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{degré exact 1, ordre 2}$$

- Formule composite du trapèze. Si $f$ est dans $C^2([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{t}(f)| \leq \frac{b-a}{12} H^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \Rightarrow \text{degré exact 1, ordre 2}$$

- Formule composite de Simpson. Si $f$ est dans $C^4([a,b])$, alors

$$|I(f) - I^c_{s}(f)| \leq \frac{b-a}{180 \cdot 16} H^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)| \Rightarrow \text{degré exact 3, ordre 4}$$

# Exercice 1 I

On veut approximer l'intégrale

$$\int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

en sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

a) Calculer une valeur approchée de cette intégrale en utilisant la formule simple du trapèze sur l'intervalle $[0, 3]$.

# Exercice 1 II

b) Pour avoir plus de précision, on divise l'intervalle $[0,3]$ en $N$ sous-intervalles égaux $I_k=[x_{k-1},x_k]$ de longueur $H=x_k-x_{k-1}=3/N$, $k=1,\dots,N$, avec $x_0=0$ et $x_N=3$, et on considère la formule composite du trapèze. On peut montrer que l'erreur commise par la formule simple du trapèze $I_{t,(k)}(f)=\dfrac{H}{2}(f(x_{k-1})+f(x_k))$ sur l'intervalle $I_k$ est

$$E^t_{(k)}=\left|\int_{I_k} f(x)\,dx - I^c_{t,(k)}(f)\right| \le \frac{H^3}{12}\max_{\xi\in I_k}|f''(\xi)| \qquad \text{si } f\in C^2.$$

Estimer, en fonction du nombre $N$ de sous-intervalles, l'erreur globale

$$E^c_t=\left|\int_0^1 f(x)\,dx - I^c_t(f)\right|$$

introduite par la formule composite du trapèze $I^c_t(f)=\sum_{k=1}^N I_{t,(k)}(f)$ sur l'intervalle $[0,3]$.

# Exercice 1 III

c) Trouver le nombre minimal $N$ de sous-intervalles afin que l'erreur globale soit plus petite que $10^{-4}$.

# Exercice 1 IV

# Exercice 1, solution

# Exercice 2 I

On considère une fonction $f \in C^2([a, b])$.

a) Soient $p_1, p_2 \in [a, b]$, $p_1 < p_2$ ; à l'aide de l'expansion de Taylor autour du point $p = (p_1 + p_2)/2$, c'est-à-dire :

$$f(x) = f(p) + (x - p)f'(p) + \frac{1}{2}(x - p)^2 f''(\eta(x)),$$

où $\eta(x)$ est compris entre $x$ et $p$, montrer l'estimation suivante :

$$\left| \int_{p_1}^{p_2} f(x)dx - (p_2 - p_1)f(p) \right| \leq \frac{(p_2 - p_1)^3}{24} \max_{x \in [p_1, p_2]} \left| f''(x) \right|.$$

# Exercice 2 II

b) Considérer la subdivision de $I = [a, b]$ en $M$ sous-intervalles équirepartis $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de longeur $H = (b-a)/M$, où $x_k = a + kH$, $k = 1, \ldots, M$. Soit

$$I^c_{mp}(f) = H \sum_{k=1}^{M} f(\overline{x}_k),$$

la valeur approchée de l'intégrale de $f$ sur $I$ par la formule composite du point milieu, où $\overline{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2$. En appliquant le résultat du point a) à chaque sous-intervalle $I_k$ montrer l'estimation de l'erreur suivante :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I^c_{mp}(f) \right| \leq \frac{b-a}{24} H^2 \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|.$$

# Exercice 2 III

c) Soit $f(x) = e^{x^2}$ ; on veut calculer $\int_0^1 f(x)dx$. Calculer le nombre de sous-intervalles nécessaires pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale avec une erreur de $10^{-6}$ avec la formule composite du point milieu.

# Exercice 2 IV

# Exercice 2, solution

# Exercice 3 I

On veut calculer numériquement l'intégrale de la fonction $f(x) = e^{-x/5}$ sur l'intervalle $[0, 5]$. Pour cela, on divise l'intervalle $[0, 5]$ en $m$ sous-intervalles égaux et on considère les formules composites du trapèze et de Simpson.

a) En sachant que l'erreur commise par la formule du trapèze $I_i^T$ sur un intervalle $[x_i, x_i + h]$ de longueur $h$ est

$$E_i^T = \left| \int_{x_i}^{x_i+h} f(t)\,dt - I_i^T(f) \right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{\xi \in [x_i, x_i+h]} |f^{(2)}(\xi)|$$

et que l'erreur commise par celle de Simpson est

$$E_i^S = \left| \int_{x_i}^{x_i+h} f(t)\,dt - I_i^S(f) \right| \leq \frac{h^5}{90} \max_{\xi \in [x_i, x_i+h]} |f^{(4)}(\xi)| \,,$$

# Exercice 3 II

où $f$ est une fonction suffisamment régulière, calculer les erreurs globales $E_h^T$ et $E_h^S$ introduites par les deux formules composites correspondantes $I_h^T$ et $I_h^S$ en fonction du nombre de sous-intervalles.

b) Trouver le nombre minimal $m$ de sous-intervalles pour que l'erreur globale soit $\leq 10^{-4}$ dans les deux cas.

# Exercice 3 III

# Exercice 3, solution