101

Nom Prenom 8

SCIPER: **9999528**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page

Les feuilles de bruillon ne serons pas corrigée.

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page

Ce document est **recto-verso**, il contient 16 pages, **la dernière est un formulaire aide-mémoire.**

Utilisez un stylo pour les réponses ouvertes et **un crayon pour les QCM**, effacez proprement avec une gomme si nécessaire.

Posez votre carte d'étudiant sur la table.

Aucun document supplémentaire n'est autorisé.

L'utilisation d'une calculatrice et de tout outil électronique on dehors de Matlab sur l'ordinateur devant vous est interdit pendant l'épreuve. Garder seulement de quoi écrire sur vous.

A la fin de l'épreuve, signez cette page et **rendez toutes les feuilles agrafées**.

Problème 1 — Equations Différentielles Ordinaires (12.4 points)

On considère le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = m\,y(t)(1 - y(t)) - z\,y(t)e^{-ay(t)}, & t \in [0,2], \\ y(0) = 0.7, \end{cases} \tag{1}$$

avec $m = 10$, $z = 17.5$ et $a = 3$.

(a) Cette partie de l'exercice consiste à cocher les bonnes réponses parmi les choix proposés. (Bonne réponse 0.2 points, mauvaise −0.2.)

Méthode	explicite	implicite	ordre 1	ordre 2	ordre 3	cond. stable	incond. stable
Crank Nicholson	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Euler Retrograde	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Euler Progressif	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Heun	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

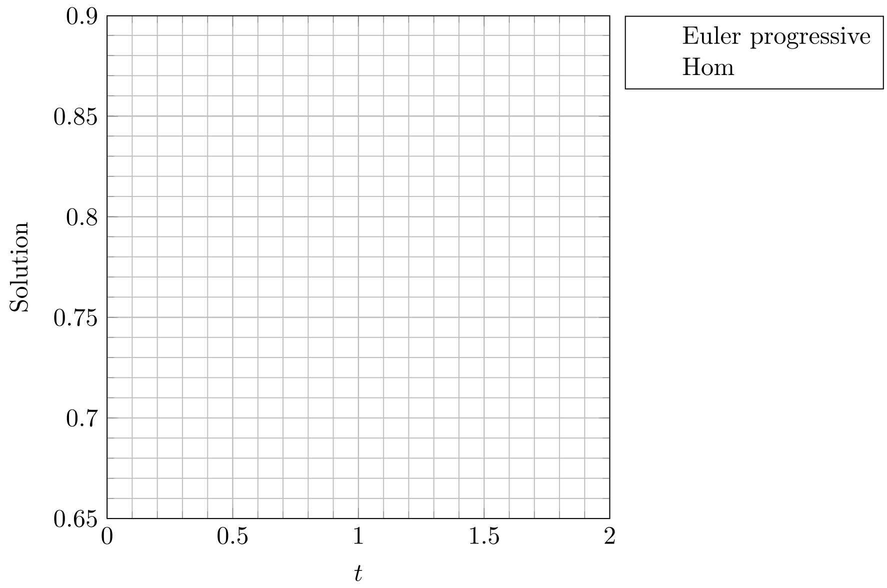
(b) On veut approcher la solution $y(t)$ du problème (**??**) par la méthode d'Euler progressive. Ecrire la méthode de manière générale ainsi que pour approcher la solution $y(t)$ du problème (**??**). Indiquer quelles sont les principaux avantages et inconvenients relatifs à cette méthode.

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

(c) Utiliser les fonctions Matlab données (`forwardEuler.m` et `Hom.m`) pour dessiner une esquisse de l'approximation de $y(t)$ pour $h = 0.2$. *Reporter les commandes Matlab utilisées.*

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

Dessiner les graphes des solutions obtenues:



(d) Calculer $y'(t)$ dans les cas où pour un t fixé $y(t) = 0.7$ ou $y(t) = 1$. Quel conséquence pour $y(t)$? On supposant que la même conclusion est valable pour u_n, déterminer, si nécessaire, pour quelles valeurs de h la condition de stabilité (contrôle des perturbations) pour la méthode d'Euler progressive est satisfaite. Aidez-vous dex Matlab. Vérifier si la méthode est stable pour la valeur $h = 0.2$. *Reporter aussi les commandes Matlab utilisées.*

Réservé au correcteur

(e) On supposant que $y(0.5) = 0.854648308472263$. Calculer de facon approximative l'ordre de convergence de la mêthode implementé dans `Hom.m`. *Reporter les commandes Matlab utilisées.*

Réservé au correcteur

(Espace supplémentaire)

Problème 2 — Equations Non-Linéaires (10 points)

On se donne la fonction $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}x^3 + x^2 - 1$, et on observe qu'elle a deux zéros α et β dans l'intervalle $[-3, 3]$.

(a) On veut utiliser la méthode de bissection pour calculer une approximation des zeros de $f(x)$. Indiquer pour quels intervalles la méthode de bissection peut être utilisée. En chaque intervalle où il est possible d'utiliser la méthode de bissection, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaire pour trouver le zéro avec une tolérance $tol = 10^{-8}$. (Bonne réponse 0.5 points, mauvaise 0.)

	0-1	4-5	26-27	28-29	30-31	48-49	Ne converge pas
$[-2, 2]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$[-2, -1]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$[-0.5, 0.5]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$[-2, 1.99]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
$[0, 1]$	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

(b) On veut utiliser la méthode de Newton pour calculer une approximation des zeros de $f(x)$.

- Ecrire la méthode de Newton pour trouver le zero de la fonction f et l'implémenter en Matlab.
- Calculer l'approximation des zéros $\alpha = -\sqrt{3}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ de la fonction f avec la méthode de Newton. Choisir $x_\alpha^{(0)} = \frac{3}{2}$ comme valeur initiale pour la méthode pour approximer α. Choisir $x_\beta^{(0)} = \frac{-6}{10}$ comme valeur initiale pour la méthode pour approximer β et utiliser dans les deux cas une tolérance `tol` $= 10^{-8}$. Tracer sur le même graphe les incréments $|x^{k+1} - x^k|$ des deux zéros considérés, en fonction de k (nombre d'itérations) en échelle semilogarithmique (avec `semilogy`). Commenter les graphes en faisant des liens avec la théorie, en particulier l'ordre de convergence de la méthode pour l'approximation des zéros α et β.

Reporter la fonction `newton` *ici.*

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

```
function [x, r, n, inc] = newton( F, dF, x0, tol, nmax )
% NEWTON Find the zeros of a of non-linear equation.
% [X] = NEWTON(F,DF,X0,TOL,NMAX) tries to find the zero X of the
% continuous and differentiable function F nearest to X0 using
% the Newton method. DF is a function which take X and return the derivative of F.
% TOL is the tolerance to reach on the increment and NMAX the maximum number of iterations.
% If the search fails an error message is displayed.
%
% [X,R,N,INC] = NEWTON(F,DF,X0,TOL,NMAX) returns the value of the
% residual R in X (computed as abs(x(k+1)-x(k))),the number of iterations
% N required for computing X and
% INC the absolute value of he increments computed by Newton in absolute value.
```

(Cet exercice peux se faire aussi sans Matlab. Dans ce cas les points de programmation de Netwon sont perdus mais pas forcément les autres.)

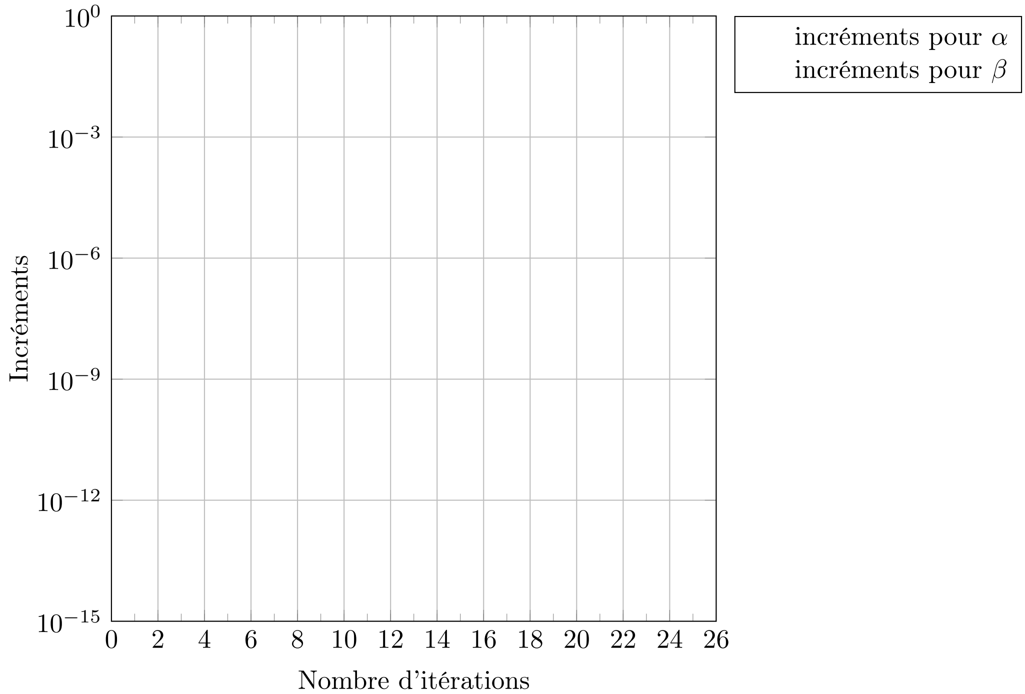
Réservé au correcteur

Reporter les commandes Matlab utilisées et le graphique obtenu sur la page suivante

Reporter les commandes Matlab utilisées

Réservé au correcteur

Réporter les incréments dans le graphique suivant (après l'utilisation de `semilogy` *vous pouvez utiliser la commande* `set(gca,'YTick',10.^[-15:3:0])`



(c) On considère maintenant la fonction $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. On veut utiliser une méthode de point fixe pour approcher les trois zéros $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $\gamma = 2$ de $g(x)$. Etudier la convergence de la mêthode du point fixe pour calculer numériquement les zéros de la fonction $g(x)$ en utilisant la fonction de point fixe $\phi(x) = g(x) + x$. (Bonne réponse 0.5 points, mauvaise 0. Une réponse par ligne est autorisée, sinon aucun point ne vous sera attribué.)

	ne converge pas	convergence locale d'ordre 1	convergence locale d'ordre 2	convergence locale d'ordre 3
$\phi(x)$ pour α	☐	☐	☐	☐
$\phi(x)$ pour β	☐	☐	☐	☐
$\phi(x)$ pour γ	☐	☐	☐	☐

(Espace supplémentaire)

Problème 3 — Systèmes Linéaires (11 points)

Soit A, P et $\mathbf{b}$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Ecrire la matrice d'itération de la méthode de Richardson stationnaire pour resoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant le préconditionneur P et $\alpha_k = \alpha = 1$. Dire si la méthode converge et justifier le rèponse. *Si vous utilisez Matlab reporter les commandes.*

Réservé au correcteur

(b) Resoudre le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec la mêthode de Richardson stationnaire (coder la fonction matlab `richardsonStationnaire.m`) avec $\mathbf{x}^{(0)} = P^{-1}\mathbf{b}$, $\alpha = 1$, `maxiter` $= 1000$ (nombre maximal d'iterations) et `tol` $= 10^{-8}$ (tolerance). Reporter le nombre d'iterationes et la solution du système lineaire.
Reporter aussi les commandes Matlab pour appeler la fonction `richardsonStationnaire`*.*

Réservé au correcteur

Reporter la fonction `richardsonStationnaire` *ici.*

Réservé au correcteur

```
function [x, iter] = richardsonStationnaire( A, b, P, x0, alpha, maxiter, tol )
% NEWTON Find the zeros of a of non-linear equation.
% [X, ITER] = RICHARDSONSTATIONNAIRE( A, b, P, x0, alpha, maxiter, tol) solves
% the linear system A x = b using x0 as initial guess, P as preconditioner,
% maxiter as maximum number of iterations and tol as tolerance on the norm
% of the residual (computed as norm(residual) ).
%
% [X, ITER] = RICHARDSONSTATIONNAIRE( A, b, P, x0, alpha, maxiter, tol) returns
% the solution x and the number of iterations done by the method
% to compute the solution.
```

(c) En sachant que $\|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\| \approx 1.4$, quel est le nombre d'iterations théoriques attendues? Que peut-on dire des méthodes du Gradient préconditionné et du Gradient Conjugué préconditionné appliquées au même problème?

Réservé au correcteur

(Espace supplémentaire)

Problème 4 — Interpolation (10 points)

(a) Expliquer le difference entre un probleme d'interpolation de Lagrange et l'approximation par la mêthode de les moindres carrés.

Réservé au correcteur

(b) On veut interpoler une fonction $f : [0.5, 1.5] \to \mathbb{R}$ aux noeuds 0.5, 1 et 1.5. Calculer la base de Lagrange associée à ces noeuds. Exprimer $\Pi_n f(x)$ et $\Pi_n g(x)$ comme combinaison linéaire des fonctions de la base de Lagrange pour $f(x) = sin(\pi x)$ et $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Réservé au correcteur

(c) Les erreurs d'interpolation au point précedant sont bornées par: (cocher la valeur la plus restrictive, bonne réponse 0.5 points, mauvaise 0.)

	0	1	π	3	0.687	0.707	0.875	2	$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi^3}{96}$	$\frac{\pi^4}{24}$
Si $f(x) = sin(\pi x)$,	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Si $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$,	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

(d) On considére les mesures suivantes

x	1.24	1.32	1.81	2.08	2.29	2.75
$f(x)$	292	296	321	333	343	363

et on presume qu'elle représentent une fonction de type $f(x) = C\, e^{-ax}$.

Déterminer les valeurs des constantes C et a à l'aide de la fonction Matlab `leastSquares.m` donné qui implémente la mêthode des moindres carrés (voir aussi le help de la fonction).

Reporter aussi vos commandes Matlab.

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Réservé au correcteur*

Nom: **Nom Prenom 8** SCIPER: **9999528**

ODE

$$-\lambda_{max} \leq \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \leq -\lambda_{min}$$

$$h < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,p} |\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)} ,$$

$$\forall n = 0, \dots, N_h \quad |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

$$|y(t_n) - u_n| \leq \frac{e^{Lt_n} - 1}{2L} \max_{t \in [0,T]} |y''(t)|\, h,$$

Lemma Soit E_n une suite de nombres positifs telle que $E_0 = 0$ et $E_{n+1} \leq (1+\delta)E_n + K$ avec $\delta > 0$ et $K > 0$. Alors

$$E_n \leq \frac{e^{\delta n} - 1}{\delta}$$

Lemma Soit E_n une suite de nombres positifs telle que $E_0 = 0$ et $(1-\delta)E_{n+1} \leq (1+\delta)E_n + K$ avec $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $K > 0$. Alors

$$E_n \leq \frac{e^{4\delta n} - 1}{2\delta} K.$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right]$$

$$... = \frac{h}{2}\left[f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n))\right]$$

Linear Systems

$$B = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A \quad , \quad \mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{b}.$$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}$$

$$\begin{aligned}
P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)} \\
\alpha_k &= \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T \mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A \mathbf{z}^{(k)}} \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\
\mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{z}^{(k)}
\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{K(P^{-1}A) - 1}{K(P^{-1}A) + 1}\right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{{\mathbf{p}^{(k)}}^T \mathbf{r}^{(k)}}{{\mathbf{p}^{(k)}}^T A \mathbf{p}^{(k)}} \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)} \\
\mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{p}^{(k)} \\
P\mathbf{z}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k+1)} \\
\beta_k &= \frac{\left(A\mathbf{p}^{(k)}\right)^T \mathbf{z}^{(k+1)}}{\left(A\mathbf{p}^{(k)}\right)^T \mathbf{p}^{(k)}} \\
\mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}
\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A , \quad c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(P^{-1}A) \frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}$$

Interpolation

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$$\max_{x\in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} (h)^{n+1} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\max_{x\in I} |\ E_1^H f(x)\ | \leq \frac{H^2}{8} \max_{x\in I} |f''(x)|.$$

$$\max_{x\in I} |\ E_n^H f(x)\ | \leq \frac{H^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|\,.$$