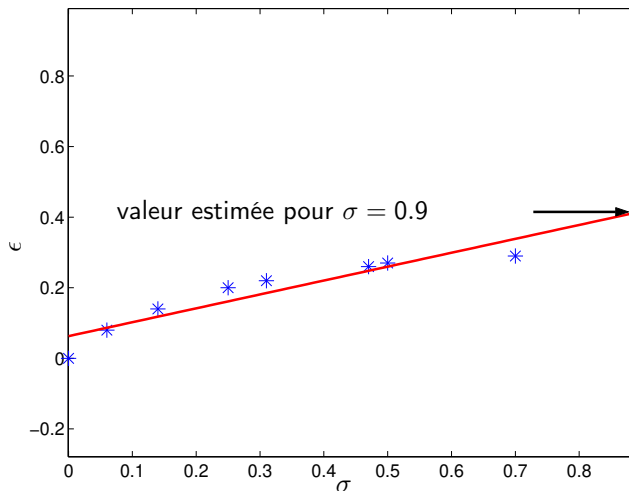


Diagram illustrating the definition of stress and strain for a cylindrical rod under tension. A force F is applied to the left face of the rod, which has a cross-sectional area A . The original length of the rod is L , and the extension (change in length) is ΔL . The stress is defined as $\sigma = F/A$ and the strain is defined as $\epsilon = \Delta L/L$.

3 / 28

Par la méthode des moindres carrés, on obtient que la droite qui approche le mieux ces données est $p(x) = 0.3938t - 0.0629$. On peut utiliser cette droite (dite *de régression*) pour estimer ϵ lorsque $\sigma = 0.9$ MPa : on trouve $p(0.9) \simeq 0.4$.



EXEMPLE

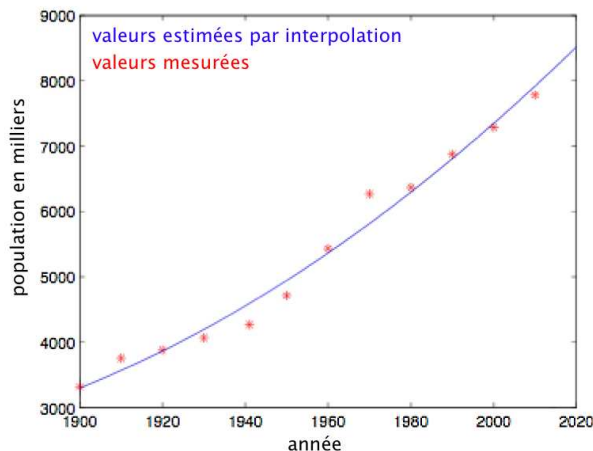
Les résultats des recensements de la population suisse entre 1900 et 2010 sont (en milliers d'habitants) :



année	1900	1910	1920	1930	1941	1950
population	3315	3753	3880	4066	4266	4715
année	1960	1970	1980	1990	2000	2010
population	5429	6270	6366	6874	7288	7783

- Peut-on estimer le nombre d'habitants de la Suisse pendant les années où il n'y a pas eu de recensement, par exemple en 1945 et en 1975 ?
- Peut-on envisager un modèle pour prédire la taille de la population en 2020 ?

Le polynôme de degré deux (parabole) qui approche ces données au sens des moindres carrés est $p(x) = 0.15t^2 - 549.9t + 501600$.



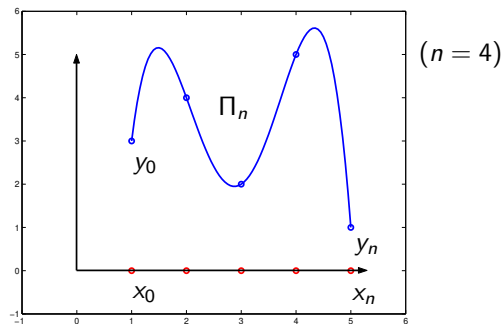
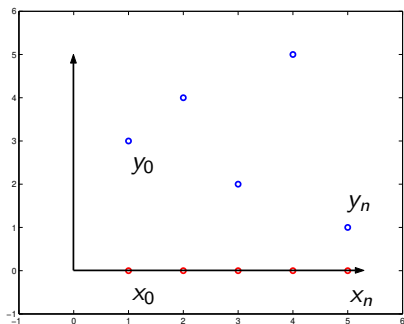
POSITION DU PROBLÈME

(JUPYTER NOTEBOOK)

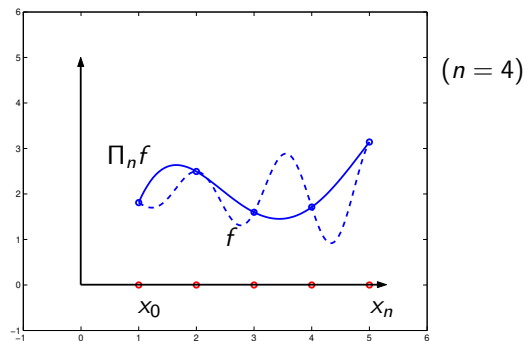
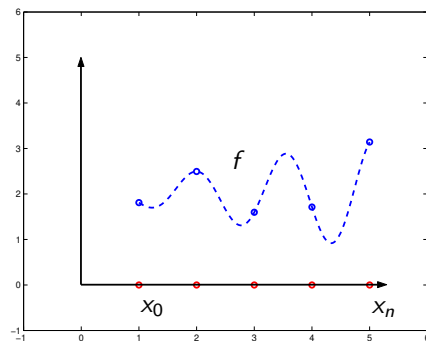
Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Etant donnés $n + 1$ noeuds distincts x_0, x_1, \dots, x_n et $n + 1$ valeurs y_0, y_1, \dots, y_n , on cherche un polynôme p de degré n (ou plus petit), tel que

$$p(x_j) = y_j \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n. \quad (1)$$

Si ce polynôme existe, on note $p = \Pi_n$ et on appelle Π_n le polynôme d'interpolation des valeurs y_j aux noeuds $x_j, j = 0, \dots, n$.



Soit $f \in C^0(I)$ et $x_0, \dots, x_n \in I$. Si on prend $y_j = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$, alors le polynôme d'interpolation $\Pi_n(x)$ est noté $\Pi_n f(x)$ et est appelé l'**interpolant de f aux noeuds x_0, \dots, x_n** .



Si le polynôme Π_n défini en (2) existe, alors il est le seul polynôme de degré n (ou plus petit) interpolant les données y_j aux nœuds x_j .

En effet, soit $Q_n(x)$ un autre polynôme d'interpolation de degré n . Alors, on a

$$Q_n(x_j) - \Pi_n(x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, n.$$

Donc, $Q_n(x) - \Pi_n(x)$ est un polynôme de degré n qui s'annule en $n + 1$ points distincts ; mais un polynôme non-nul de degré n (ou plus petit) a au maximum n racines. Il s'ensuit que $Q_n - \Pi_n = 0$ (polynôme nul) et $Q_n = \Pi_n$, d'où l'unicité du polynôme interpolant.

Existe-il toujours un polynôme interpolant ? Comment le calculer ?

MATRICE DE VANDERMONDE

Il est possible d'écrire un système d'équations et de trouver les coefficients de manière directe. Nous cherchons les coefficients du polynôme $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ qui satisfont les $(n+1)$ équations $p(x_k) = y_k$, $k = 0, \dots, n$, c'est-à-dire

$$a_0 + a_1x_k + \dots + a_nx_k^n = y_k, \quad k = 0, \dots, n$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ce n'est pas toujours la meilleure solution. Une méthode plus efficace est de passer par une base polynomiale particulière appelée *base de Lagrange*.

BASE DE LAGRANGE

(JUPYTER NOTEBOOK)

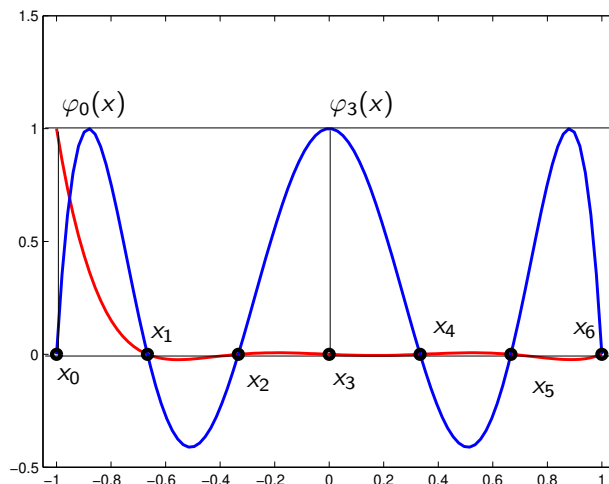
On considère les polynômes φ_k , $k = 0, \dots, n$ de degré n tels que

$$\varphi_k(x_j) = \delta_{jk}, \quad k, j = 0, \dots, n,$$

où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$. Explicitement, on a

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

La figure qui suit montre deux polynômes de Lagrange de degré $n = 6$ relatifs aux noeuds d'interpolation $x_0 = -1$, $x_1 = -2/3, \dots, x_5 = 2/3$, et $x_6 = 1$.



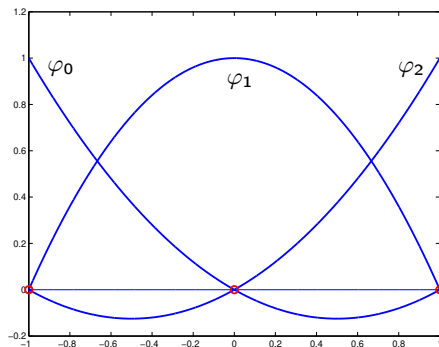
EXEMPLE

Pour $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, les polynômes de la base de Lagrange sont

$$\varphi_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}t(x - 1),$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -(x + 1)(x - 1),$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}t(x + 1).$$



POLYNÔME D'INTERPOLATION

(JUPYTER NOTEBOOK)

Le polynôme d'interpolation Π_n des valeurs y_j aux noeuds x_j , $j = 0, \dots, n$, s'écrit

$$\Pi_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \varphi_k(x), \quad (2)$$

car il vérifie $\Pi_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k \varphi_k(x_j) = y_j$.

Par conséquent, on aura

$$\Pi_n f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \varphi_k(x).$$

INTERPOLATION D'UNE FONCTION RÉGULIÈRE

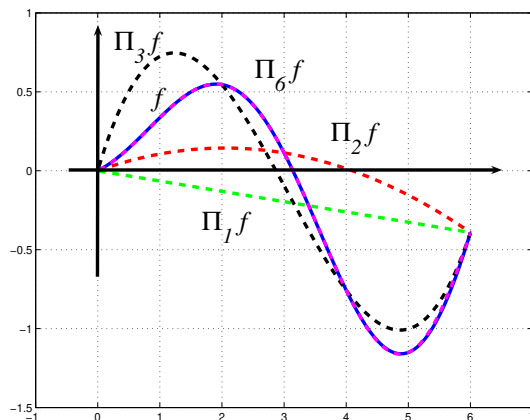
Théorème (Erreur d'interpolation) Soient x_0, x_1, \dots, x_n , $n + 1$ nœuds équirépartis dans $I = [a, b]$ et soit $f \in C^{n+1}(I)$. Pour $t \in I$, soit $E_n f(x) = f(x) - \Pi_n f(x)$. Alors, on a

$$\max_{x \in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|, \quad (3)$$

On remarque que l'erreur d'interpolation dépend de la dérivée $n + 1$ de f .

EXEMPLE

Polynômes d'interpolation $\Pi_i f$ pour $i = 1, 2, 3, 6$ et $f(x) = \frac{t+1}{5} \sin(x)$, avec des noeuds équirépartis sur $[0, 6]$.



COMPORTEMENT POUR n GRAND

REMARQUE

Le fait que

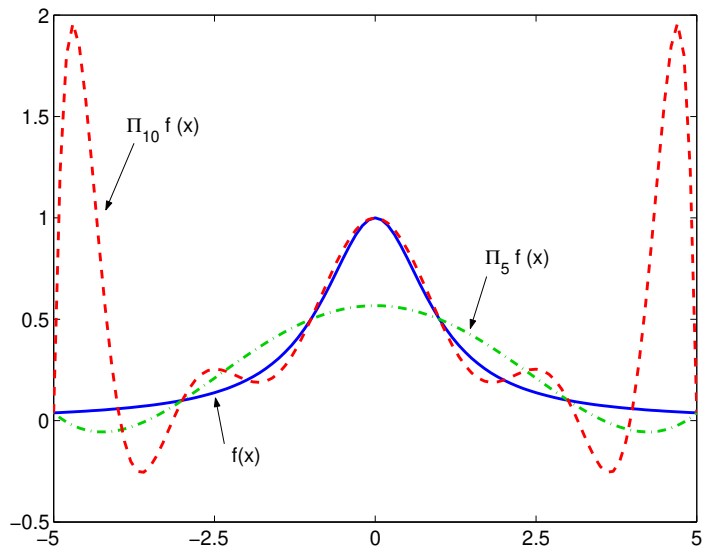
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} = 0$$

n n'implique pas forcément que $\max_{t \in I} |E_n f(x)|$ tende vers zéro quand $n \rightarrow \infty$.

EXEMPLE

(Runge) Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $t \in [-5, 5]$. Si on l'interpole dans des noeuds équirépartis, l'interpolant présente des oscillations au voisinage des extrémités de l'intervalle, comme on peut le voir sur la figure suivante.

Fonction de Runge et oscillations des polynômes interpolants dans des noeuds équirépartis.



INTERPOLATION DE CHEBYSHEV

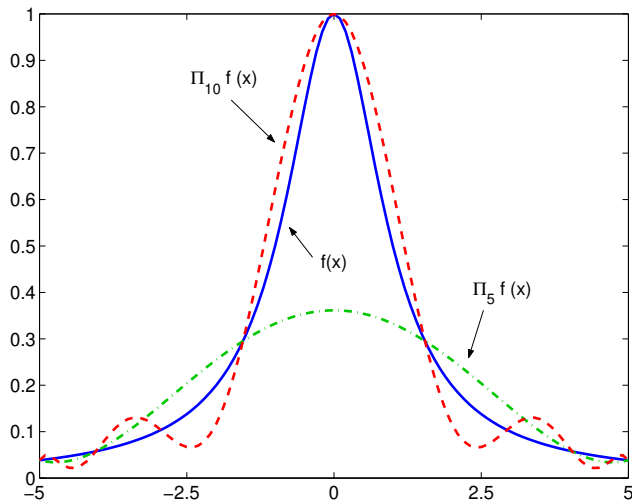
Alternatives : Interpolation de Chebyshev, interpolation par morceaux, ou encore approximation polynomiale.

Pour chaque entier positif $n \geq 1$, pour $i = 0, \dots, n$, on note $\hat{t}_i = -\cos(\pi i/n) \in [-1, 1]$ *les nœuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto* ou de *Clenshaw-Curtis* et on définit

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \hat{t}_i \in [a, b],$$

pour un intervalle arbitraire $[a, b]$. Pour une fonction continue $f \in C^1([a, b])$, le polynôme d'interpolation $\Pi_n f$ de degré n aux noeuds $\{x_i, i = 0, \dots, n\}$ converge uniformément vers f quand $n \rightarrow \infty$.

5 (suite) On reprend le même exemple mais on interpole la fonction de Runge dans les points de Chebyshev. La figure montre les polynômes de Chebyshev de degré $n = 5$ et $n = 10$. On remarque que les oscillations diminuent lorsqu'on augmente le degré du polynôme.

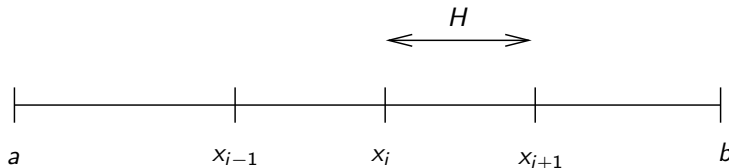


INTERPOLATION LINÉAIRE PAR MORCEAUX

(Sec. 3.4 du livre)

Soient $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ des noeuds qui divisent l'intervalle $I = [a, b]$ en une réunion d'intervalles $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ de longueur H où

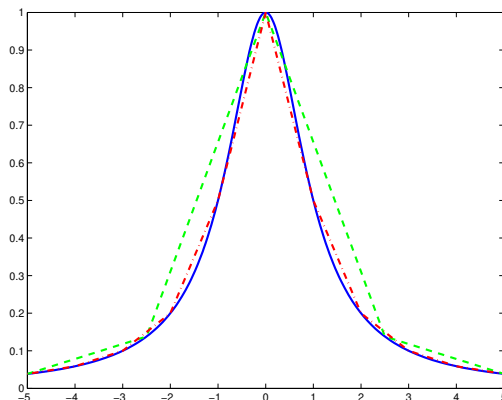
$$H = \frac{b - a}{N}.$$



Sur chaque sous-intervalle I_i , on interpole $f|_{I_i}$ par un polynôme de degré 1. Le polynôme par morceaux (polynôme composite) qu'on obtient est noté $\Pi_1^H f(x)$ et on a :

$$\Pi_1^H f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \quad \text{pour } x \in I_i.$$

5 (suite) On considère les polynômes par morceaux de degré $n = 1$ interpolant la fonction de Runge pour 5 et 10 sous-intervalles de $[-5, 5]$.



La figure montre les polynômes $\Pi_1^{H_1} f$ et $\Pi_1^{H_2} f$ pour $H_1 = 2.5$ et $H_2 = 1.0$.

Si $f \in C^2(I)$, ($I = [x_0, x_N]$) et on dénote $E_1^H f(x) = f(x) - \Pi_1^H f(x)$, alors

$$\max_{x \in I} |E_1^H f(x)| \leq \frac{H^2}{8} \max_{x \in I} |f''(x)|.$$

D'après la formule (3), sur chaque intervalle I_j , on a

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |E_1^H f(x)| \leq \frac{H^2}{4(1+1)} \max_{x \in I_i} |f''(x)|.$$



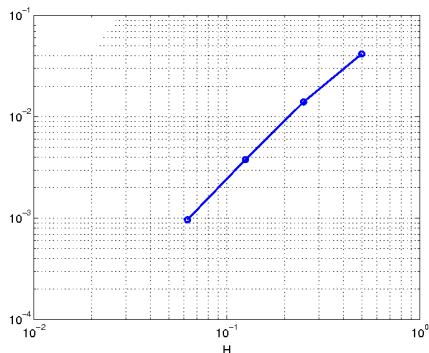
Soit p_H une approximation par morceaux de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sur des sous-intervalles de longueur H . On dit que la convergence est d'ordre q s'il existe une constante $C \geq 0$ indépendante de H telle que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - p_H(x)| \leq CH^q.$$

On peut montrer que, si l'on utilise un polynôme de degré n (≥ 1) et si l'on dénote $E_n^H f(x) = f(x) - \Pi_n^H f(x)$, dans chaque sous-intervalle I_i , on trouve

$$\max_{x \in I} |E_n^H f(x)| \leq \frac{H^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

5 (suite) On considère la fonction de Runge $f(x)$ sur $[-5, 5]$, on prend un nombre K croissant de sous-intervalles $K = 20, 40, 80, 160$ et on estime l'erreur d'interpolation commise en évaluant $|E_1^H f(x)|$ sur une grille très fine :



Erreur d'interpolation $\max_{x \in I} |E_n^H f(x)|$ de la fonction de Runge par le polynôme composite Π_1^H en fonction de H .

L'erreur $\max_{x \in I} |E_n^H f(x)|$ pour l'interpolation linéaire par morceaux se comporte comme CH^2 : ce résultat est en accord avec le théorème 1. De plus, si on calcule les rapports $\max_{x \in I} |E_n^H f(x)| / H^2$, on peut estimer la constante C .

LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

(Sec. 3.6 du livre)

Supposons que l'on dispose de $n + 1$ points x_0, x_1, \dots, x_n et $n + 1$ valeurs y_0, y_1, \dots, y_n . On a vu que, si le nombre de données est grand, le polynôme interpolant peut présenter des oscillations importantes.

Pour avoir une meilleure représentation des données, on peut chercher un polynôme de degré $m < n$ qui approche "au mieux" les données.

DÉFINITION

On appelle *polynôme aux moindres carrés de degré m* $\tilde{f}_m(x)$ le polynôme de degré m tel que

$$\sum_{i=0}^n |y_i - \tilde{f}_m(x_i)|^2 \leq \sum_{i=0}^n |y_i - p_m(x_i)|^2 \quad \forall p_m(x) \in \mathbb{P}_m \quad (4)$$

REMARQUE

Lorsque $y_i = f(x_i)$ (f étant une fonction continue) alors \tilde{f}_m est dit *l'approximation de f au sens des moindres carrés*.

MATRICE DE VANDERMONDE

Nous cherchons les coefficients du polynôme $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ qui satisfont les $(n+1)$ équations $p(x_k) = y_k, k = 0, \dots, n$, c'est-à-dire

$$a_0 + a_1x_k + \dots + a_mx_k^m = y_k, \quad k = 0, \dots, n$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle $B\vec{a} = \vec{y}$ où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Puisque $m < n$, ce système est incompatible la plupart du temps.

Par contre, on peut le résoudre au sens des moindres carrés, en considérant :

$$B^T B \vec{a} = B^T \vec{y}.$$

Ce système linéaire est dit *système d'équations normales*. Le polynôme défini par les coefficients obtenus est exactement le *polynôme aux moindres carrés de degré m* (4).