ANALYSE NUMÉRIQUE SV

2 – INTERPOLATION

Simone Deparis

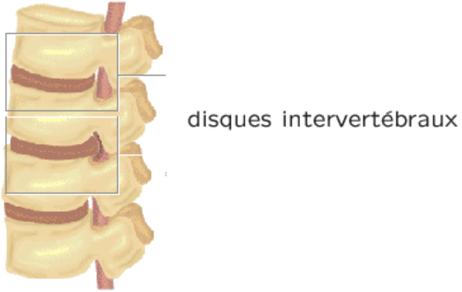
EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

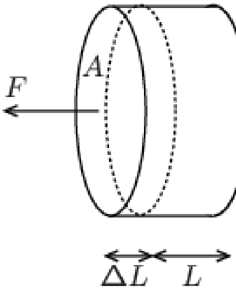
Exemples et motivations

Exemple

On considère un test mécanique pour établir le lien entre contraintes ($MPa = 100N/cm^2$) et déformations relatives (cm/cm) d'un échantillon de tissu biologique (disque intervertébral, selon P. Komarek, Ch. 2 de *Biomechanics of Clinical Aspects of Biomedicine*, 1993, J. Valenta ed., Elsevier).



test i	contrainte σ	déformation ϵ
1	0.00	0.00
2	0.06	0.08
3	0.14	0.14
4	0.25	0.20
5	0.31	0.23
6	0.47	0.25
7	0.60	0.28
8	0.70	0.29

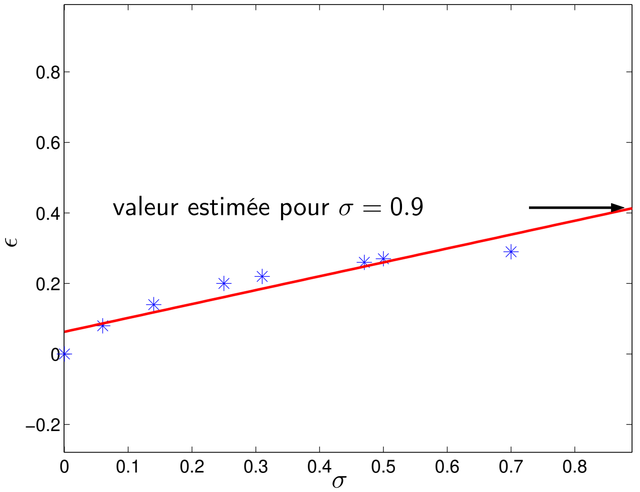


$\sigma = F/A$

$\epsilon = \Delta L/L$

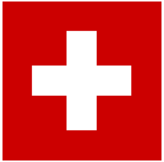
A partir de ces données, on veut estimer la déformation correspondant à un effort $\sigma = 0.9$ MPa.

Par la méthode des moindres carrés, on obtient que la droite qui approche le mieux ces données est $p(x) = 0.3938t - 0.0629$. On peut utiliser cette droite (dite *de régression*) pour estimer ϵ lorsque $\sigma = 0.9$ MPa : on trouve $p(0.9) \simeq 0.4$.



Exemple

Les résultats des recensements de la population suisse entre 1900 et 2010 sont (en milliers d'habitants) :

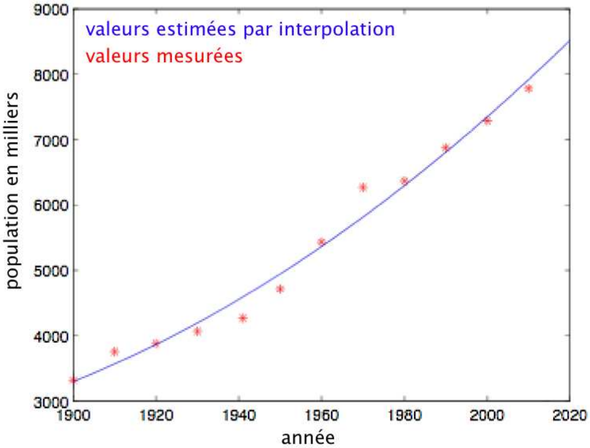


année	1900	1910	1920	1930	1941	1950
population	3315	3753	3880	4066	4266	4715

année	1960	1970	1980	1990	2000	2010
population	5429	6270	6366	6874	7288	7783

- Peut-on estimer le nombre d'habitants de la Suisse pendant les années où il n'y a pas eu de recensement, par exemple en 1945 et en 1975 ?
- Peut-on envisager un modèle pour prédire la taille de la population en 2020 ?

Le polynôme de degré deux (parabole) qui approche ces données au sens des moindres carrés est $p(x) = 0.15t^2 - 549.9t + 501600$.

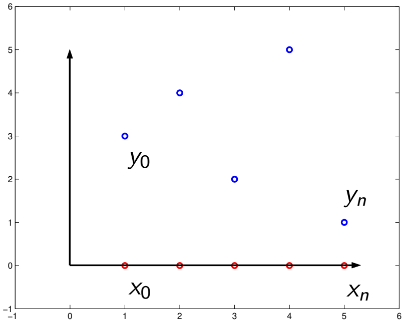


Position du problème

Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Etant donnés $n+1$ noeuds distincts x_0, $x_1, \ldots$ x_n et $n+1$ valeurs y_0, $y_1, \ldots$ y_n, on cherche un polynôme p de degré n (ou plus petit), tel que

$$\boxed{p(x_j) = y_j \qquad \text{pour } \ 0 \leq j \leq n.} \tag{1}$$

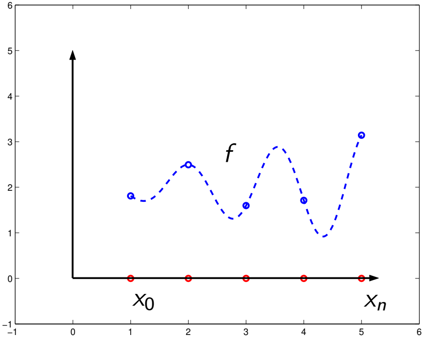
Si ce polynôme existe, on note $\Pi_n = p$ et on appelle Π_n le polynôme d'interpolation des valeurs y_j aux noeuds x_j, $j = 0, \ldots, n$.



$(n = 4)$

Π_4 ?

Soit $f \in C^0(I)$ et $x_0, \ldots, x_n \in I$. Si on prend $y_j = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$, alors le polynôme d'interpolation $\Pi_n(x)$ est noté $\Pi_n f(x)$ et est appelé l'interpolant de f aux noeuds $x_0, \ldots\ x_n$.



$(n = 4)$

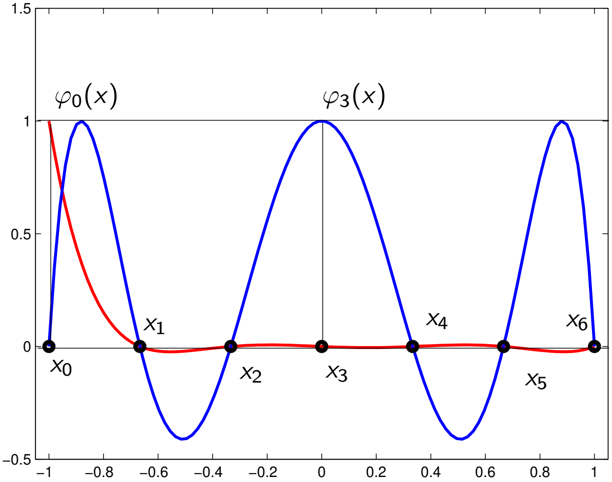
Π_4 ?

Unicité

Matrice de Vandermonde

Base de Lagrange

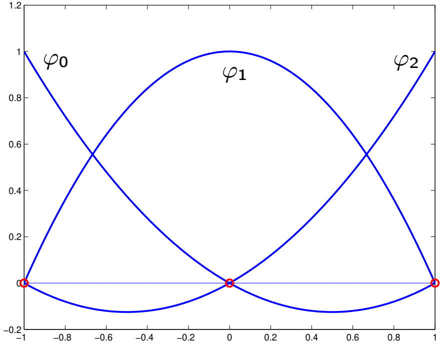
La figure qui suit montre deux polynômes de Lagrange de degré $n = 6$ relatifs aux noeuds d'interpolation $x_0 = -1$, $x_1 = -2/3, \ldots, x_5 = 2/3$, et $x_6 = 1$.



Exemple

Pour $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, les polynômes de la base de Lagrange sont

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{2}t(x-1),\\
\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -(x+1)(x-1),\\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{2}t(x+1).
\end{aligned}$$

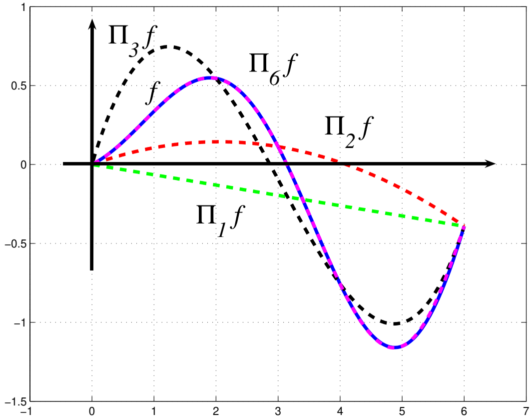


Polynôme d'interpolation

Interpolation d'une fonction régulière

Exemple

Polynômes d'interpolation $\Pi_i f$ pour $i = 1, 2, 3, 6$ et $f(x) = \dfrac{t+1}{5}\sin(x)$, avec des noeuds équirépartis sur $[0, 6]$.



Comportement pour n grand

Remarque

Le fait que

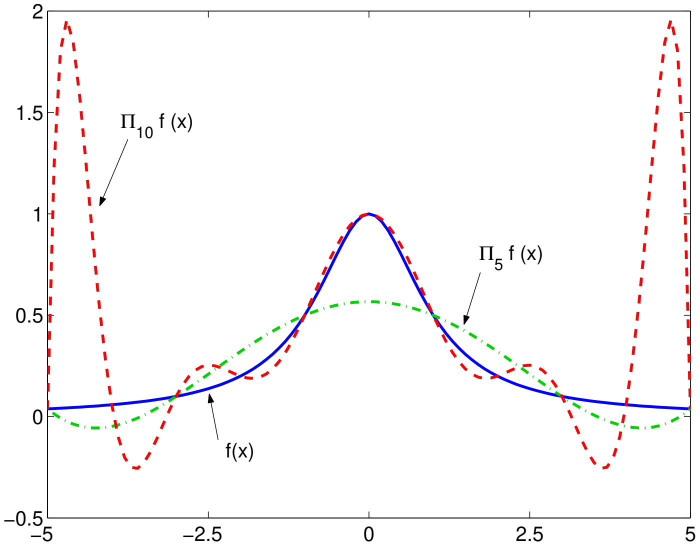
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} = 0$$

n'implique pas forcément que $\max_{t\in I} |E_n f(x)|$ *tende vers zéro quand* $n \to \infty$.

Exemple

(Runge) Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $t \in [-5, 5]$. Si on l'interpole dans des noeuds équirépartis, l'interpolant présente des oscillations au voisinage des extrémités de l'intervalle, comme on peut le voir sur la figure suivante.

Fonction de Runge et oscillations des polynômes interpolants dans des noeuds équirépartis.



INTERPOLATION DE CHEBYSHEV

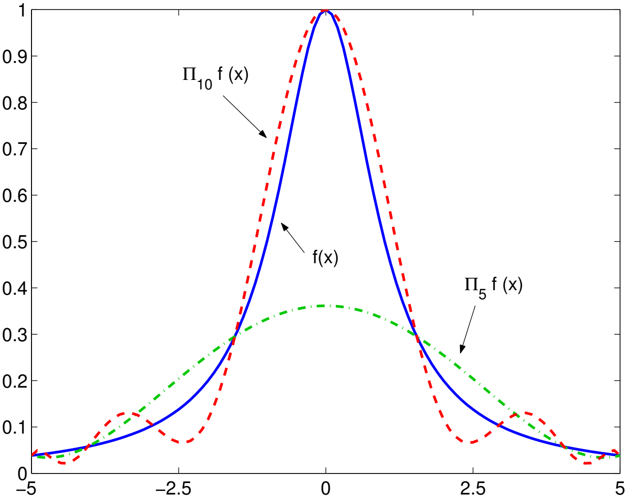
Alternatives : Interpolation de Chebyshev, interpolation par morceaux, ou encore approximation polynomiale.

Pour chaque entier positif $n \geq 1$, pour $i = 0, \ldots n$, on note $\hat{t}_i = -\cos(\pi i/n) \in [-1, 1]$ *les nœuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto* ou *de Clenshaw-Curtis* et on définit

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{t}_i \in [a, b],$$

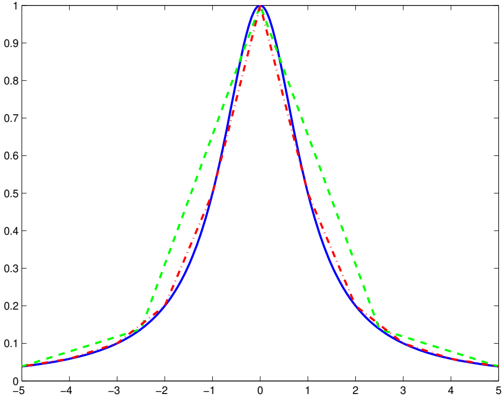
pour un intervalle arbitraire $[a, b]$. Pour une fonction continue $f \in C^1([a, b])$, le polynôme d'interpolation $\Pi_n f$ de degré n aux noeuds $\{x_i, i = 0, \ldots, n\}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

5 (suite) On reprend le même exemple mais on interpole la fonction de Runge dans les points de Chebyshev. La figure montre les polynômes de Chebyshev de degré $n = 5$ et $n = 10$. On remarque que les oscillations diminuent lorsqu'on augmente le degré du polynôme.



Interpolation linéaire par morceaux

5 (suite) On considère les polynômes par morceaux de degré $n = 1$ interpolant la fonction de Runge pour 5 et 10 sous-intervalles de $[-5, 5]$.

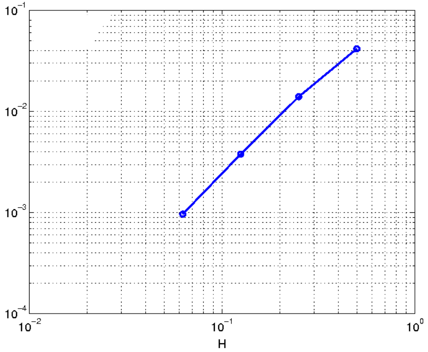


La figure montre les polynômes $\Pi_1^{H_1} f$ et $\Pi_1^{H_2} f$ pour $H_1 = 2.5$ et $H_2 = 1.0$.

Convergence I

Convergence II

5 (suite) On considère la fonction de Runge $f(x)$ sur $[-5,5]$, on prend un nombre K croissant de sous-intervalles $K = 20, 40, 80, 160$ et on estime l'erreur d'interpolation commise en évaluant $|E_1^H f(x)|$ sur une grille très fine :



Erreur d'interpolation $\max_{x\in I} \mid E_n^H f(x) \mid$ de la fonction de Runge par le polynôme composite Π_1^H en fonction de H.

L'erreur $\max_{x\in I} \mid E_n^H f(x) \mid$ pour l'interpolation linéaire par morceaux se comporte comme CH^2 : ce résultat est en accord avec le théorème 1. De plus, si on calcule les rapports $\max_{x\in I} \mid E_n^H f(x) \mid / H^2$, on peut estimer la constante C.

La méthode des moindres carrés I

La méthode des moindres carrés II

La méthode des moindres carrés III