ANALYSE NUMÉRIQUE SV

2 – INTERPOLATION

Simone Deparis

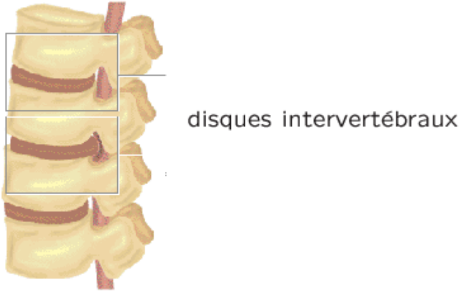
EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

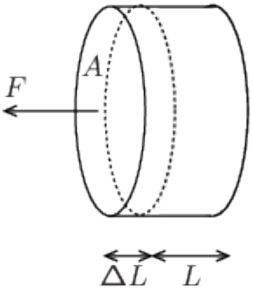
Exemples et motivations

Exemple

On considère un test mécanique pour établir le lien entre contraintes ($MPa = 100N/cm^2$) et déformations relatives (cm/cm) d'un échantillon de tissu biologique (disque intervertébral, selon P. Komarek, Ch. 2 de *Biomechanics of Clinical Aspects of Biomedicine*, 1993, J. Valenta ed., Elsevier).



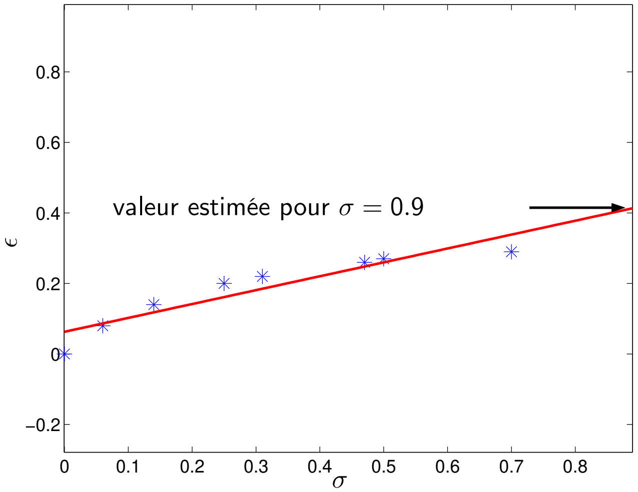
test i	contrainte σ	déformation ϵ
1	0.00	0.00
2	0.06	0.08
3	0.14	0.14
4	0.25	0.20
5	0.31	0.23
6	0.47	0.25
7	0.60	0.28
8	0.70	0.29



$$\sigma = F/A$$
$$\epsilon = \Delta L/L$$

A partir de ces données, on veut estimer la déformation correspondant à un effort $\sigma = 0.9$ MPa.

Par la méthode des moindres carrés, on obtient que la droite qui approche le mieux ces données est $p(x) = 0.3938t - 0.0629$. On peut utiliser cette droite (dite *de régression*) pour estimer ϵ lorsque $\sigma = 0.9$ MPa : on trouve $p(0.9) \simeq 0.4$.



Exemple

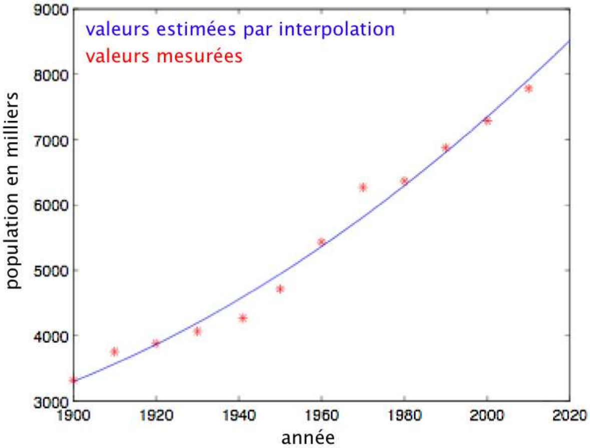
Les résultats des recensements de la population suisse entre 1900 et 2010 sont (en milliers d'habitants) :

année	1900	1910	1920	1930	1941	1950
population	3315	3753	3880	4066	4266	4715

année	1960	1970	1980	1990	2000	2010
population	5429	6270	6366	6874	7288	7783

- Peut-on estimer le nombre d'habitants de la Suisse pendant les années où il n'y a pas eu de recensement, par exemple en 1945 et en 1975 ?
- Peut-on envisager un modèle pour prédire la taille de la population en 2020 ?

Le polynôme de degré deux (parabole) qui approche ces données au sens des moindres carrés est $p(x) = 0.15t^2 - 549.9t + 501600$.

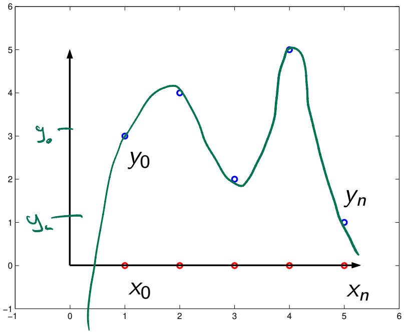


Position du problème

Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Etant donnés $n+1$ noeuds distincts $x_0, x_1, \ldots x_n$ et $n+1$ valeurs $y_0, y_1, \ldots y_n$, on cherche un polynôme p de degré n (ou plus petit), tel que

$$\boxed{p(x_j) = y_j \qquad \text{pour } \; 0 \leq j \leq n.} \tag{1}$$

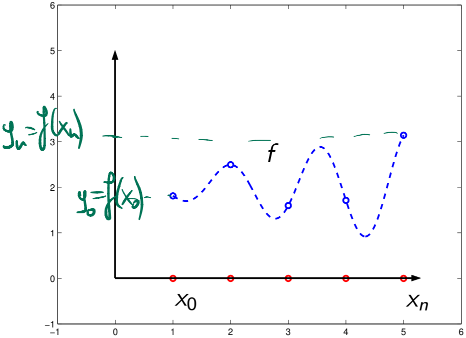
Si ce polynôme existe, on note $\Pi_n = p$ et on appelle Π_n le polynôme d'interpolation des valeurs y_j aux noeuds x_j, $j = 0, \ldots, n$.



$(n = 4)$

Π_4 ?

Soit $f \in C^0(I)$ et $x_0, \ldots, x_n \in I$. Si on prend $y_j = f(x_j)$, $0 \leq j \leq n$, alors le polynôme d'interpolation $\Pi_n(x)$ est noté $\Pi_n f(x)$ et est appelé l'interpolant de f aux noeuds $x_0, \ldots\ x_n$.



$(n = 4)$

Π_4 ?

Unicité

Supposons d'avoir 2 polynomes p_n et q_n de degré $\le n$ qui interpolent les donné $y_0,\dots,y_n$ en $x_0,\dots,x_n$, c-à-d

$$y_0=p_n(x_0),\dots, y_n=p_n(x_n) \quad \text{et} \quad y_0=q_n(x_0),\dots, y_n=q_n(x_n).$$

$$0 = y_0-y_0 = p_n(x_0)-q_n(x_0), \dots, \quad 0=y_n-y_n=p_n(x_n)-q_n(x_n)$$

Le polynome p_n-q_n :

- est de degré $\le n$
- possède $x_0,\dots,x_n$ racines (zéros).

Si $x_0,\dots,x_n$ sont distinctes, p_n-q_n possède $n+1$ racine, alors c'est le polynome $(p_n-q_n)(x)=0\ \forall x$, c-à-d. $p_n=q_n$

Matrice de Vandermonde

Comment trouver le polynôme d'intepolation, s'il existe ?

$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$p_n(x_0) = y_0, \dots, p_n(x_n) = y_n$.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_k + \dots + a_n x_k^n = y_k \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{y}}$$

$B\vec{a} = \vec{y}$ où B $(n+1)\times(n+1)$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$

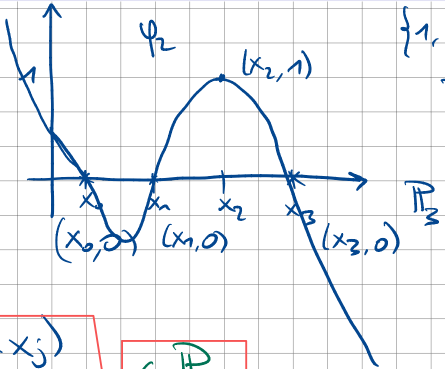
$\longrightarrow \Pi_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ $\qquad \Pi_n(x_k) = y_k \quad k = 0, \dots, n$

Base de Lagrange

On considère les polynômes φ_k, $\boxed{k=0,\dots,n}$ de degré n tels que

$$\boxed{\varphi_k(x_j)=\delta_{kj}\begin{cases}1 & \text{si } k=j\\ 0 & \text{si } k\neq j\end{cases}}$$

$j=0,\dots,n$



$\{1,t,t^2,t^3\}$

$\mathbb{P}_n$

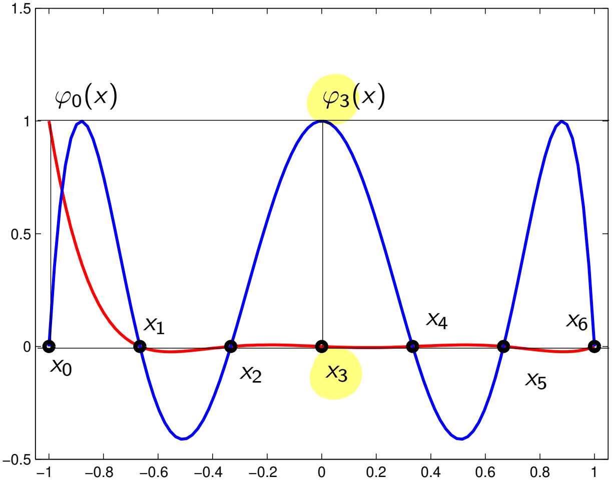
Explicitement :

$$\boxed{\varphi_k(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}}\quad\boxed{\in\mathbb{P}_n}$$

$\hookrightarrow$ $x_0,\dots,x_n$ distincts ! $x_k-x_j\neq 0$ $k\neq j$

Exercice : calculer $\varphi_k(x_k)$ et $\varphi_k(x_j)$ $k\neq j$

La figure qui suit montre deux polynômes de Lagrange de degré $n = 6$ relatifs aux noeuds d'interpolation $x_0 = -1$, $x_1 = -2/3, \ldots, x_5 = 2/3$, et $x_6 = 1$.



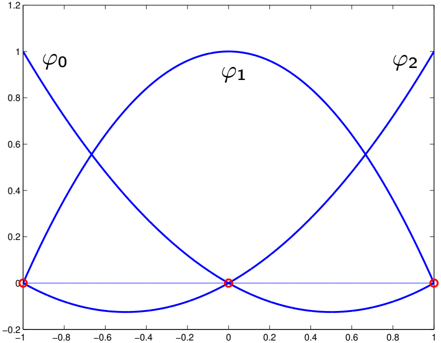
$\varphi_3(x_3) = 1$

$\varphi_3(x_j) = 0 \quad j = 0, 1, 2, 4, 5, 6$

Exemple

Pour $n = 2$, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, les polynômes de la base de Lagrange sont

$$
\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{2}\cancel{x}(x-1),\\
\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -(x+1)(x-1),\\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{2}\cancel{x}(x+1).
\end{aligned}
$$



Base de Lagrange associé aux noeds $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$

Polynôme d'interpolation

$x_0, \dots, x_n$ noeuds , $y_0, \dots, y_n$ données.

Base de Lagrange $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$

$$\Pi_n(x) = \underbrace{y_0 \varphi_0(x) + y_1 \varphi_1(x) + \dots + y_n \varphi_n(x)}_{\text{combinaison linéaire de } \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}} = \sum_{k=0}^{n} y_k \varphi_k(x) \in \mathbb{P}_n$$

Est-ce que $\Pi_n(x_k) = y_k$?

$$\Pi_n(x_k) = y_0 \underbrace{\varphi_0(x_k)}_{=0} + y_1 \underbrace{\varphi_1(x_k)}_{=0} + \dots + y_k \underbrace{\varphi_k(x_k)}_{=1} + \dots + y_n \underbrace{\varphi_n(x_k)}_{=0}$$

δ_{0k}

$$= 0 + \dots + y_k \cdot 1 + \dots + 0 = y_k$$

Le polynôme ainsi construit s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange.

Interpolation d'une fonction régulière

$x_0, \dots, x_n$ noeuds (distincts), une fonction f "assez" régulière. (au moins continue!)

Base de Lagrange $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ associée à $x_0, \dots, x_n$

$$\Pi_n f(x) = f(x_0)\varphi_0(x) + \dots + f(x_n)\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\varphi_k(x)$$

Théorème (erreur d'interpolation) Soient : $I = [a,b]$, $x_0 = a, \dots, x_k, \dots, x_n = b$ équireparties dans l'interval $[a,b]$, $f : [a,b] \to \mathbb{R} \in C^{n+1}([a,b])$.

On a que

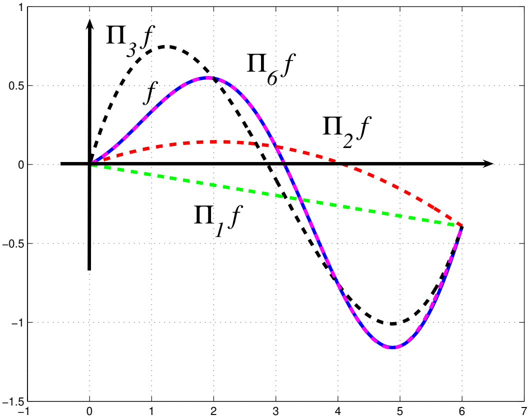
$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_n f(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Rem : $h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, $k = 0, \dots, n$. $x_{k+1} - x_k = h$

Exemple

Polynômes d'interpolation $\Pi_i f$ pour $i = 1, 2, 3, 6$ et $f(x) = \frac{\cancel{x}+1}{5}\sin(x)$, avec des noeuds équirépartis sur $[0, 6]$.

$|f^{(n)}(x)|$ borné pour $x \in [0,6]$



COMPORTEMENT POUR n GRAND

REMARQUE

Le fait que

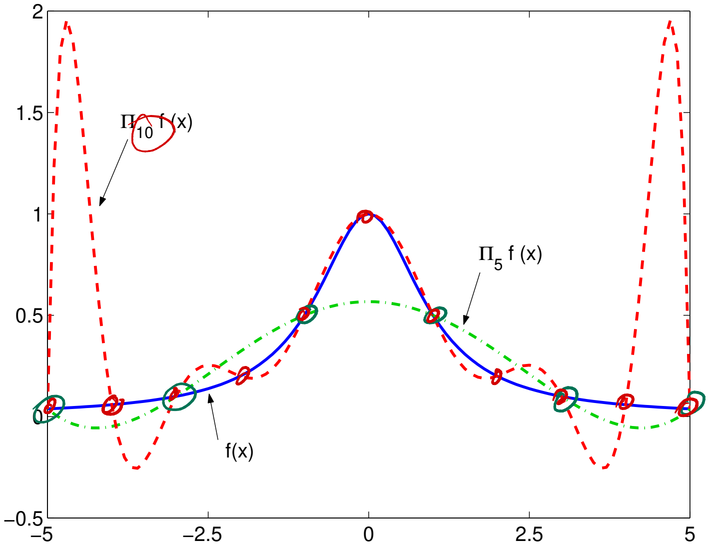
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} = 0$$

n'implique pas forcément que $\max_{t\in I} |E_n f(x)|$ *tende vers zéro quand* $n \to \infty$.

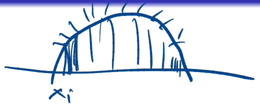
EXEMPLE

(Runge) Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $t \in [-5, 5]$. Si on l'interpole dans des noeuds équirépartis, l'interpolant présente des oscillations au voisinage des extrémités de l'intervalle, comme on peut le voir sur la figure suivante.

Fonction de Runge et oscillations des polynômes interpolants dans des noeuds équirépartis.



Interpolation de Chebyshev



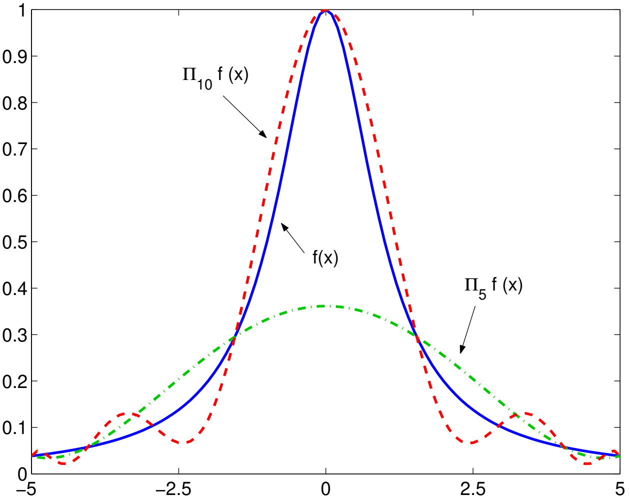
Alternatives : Interpolation de Chebyshev, interpolation par morceaux, ou encore approximation polynomiale.

Pour chaque entier positif $n \geq 1$, pour $i = 0, \ldots n$, on note $\hat{t}_i = -\cos(\pi i/n) \in [-1, 1]$ *les nœuds de Chebyshev-Gauss-Lobatto* ou *de Clenshaw-Curtis* et on définit

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\hat{t}_i \in [a, b],$$

pour un intervalle arbitraire $[a, b]$. Pour une fonction continue $f \in C^1([a, b])$, le polynôme d'interpolation $\Pi_n f$ de degré n aux noeuds $\{x_i, i = 0, \ldots, n\}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

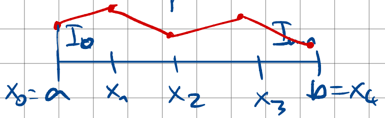
5 (suite) On reprend le même exemple mais on interpole la fonction de Runge dans les points de Chebyshev. La figure montre les polynômes de Chebyshev de degré $n = 5$ et $n = 10$. On remarque que les oscillations diminuent lorsqu'on augmente le degré du polynôme.



Interpolation linéaire par morceaux

Soient $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ des noeuds qui divisent l'intervalle $[a,b]$.

$I_k = [x_k, x_{k+1}]$ $k = 0, \dots, N-1$



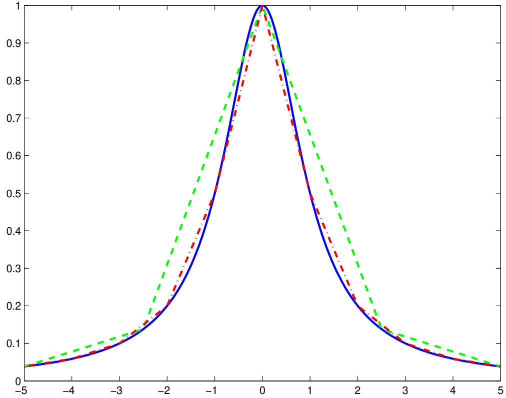
$N = 4$

Sur chaque sous-intervalle I_k on interpole la fonction $f|_{I_k}$ par un polynôme de degré n.

Pour $n=1$
$$\Pi_1^H f(x) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), \quad x \in I_k$$

Pour $n=2$: Il faut définir les noeuds d'interpolation à l'intérieur des intervalles I_k. Ensuite :
$$\Pi_2^H f(x) = \Pi_2^{(k)} f(x) \quad x \in I_k$$

5 (suite) On considère les polynômes par morceaux de degré $n = 1$ interpolant la fonction de Runge pour 5 et 10 sous-intervalles de $[-5, 5]$.



La figure montre les polynômes $\Pi_1^{H_1} f$ et $\Pi_1^{H_2} f$ pour $H_1 = 2.5$ et $H_2 = 1.0$.

CONVERGENCE I

Théorème Si $f \in C^2([a,b])$, $x_k = a + kH$, $H = \frac{b-a}{N}$,

alors $\max\limits_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \Pi_1^H f(x) \right| \le \frac{H^2}{8} \max\limits_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|$

Démonstration : Sur chaque sous-intervalle I_k on peut appliquer l'erreur polynomiale pour les points équirépartis $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, $\{x_k, x_{k+1}\}$

$$\max_{x\in I_k} \left| f(x) - \Pi_1^{(k)} f(x) \right| \le \frac{(x_{k+1}-x_k)^{\overbrace{n+1}^{2}}}{4\underbrace{(n+1)}_{2 = 1+1}} \max_{x\in I_k} \left| f^{\underbrace{(n+1)}_{=2}}(x) \right| \qquad \text{ici } \underline{\underline{n=1}}$$

$$\le \frac{H^2}{4\cdot 2} \max_{x\in I_k} \left| f''(x) \right|$$

$$\max_{k=0,\dots,N-1} \left(\max_{x\in I_k} \text{ --- '' --- } \right) \le \frac{H^2}{8} \max_{x\in[a,b]} \left| f''(x) \right|$$

Convergence II

On peut aussi démontrer que

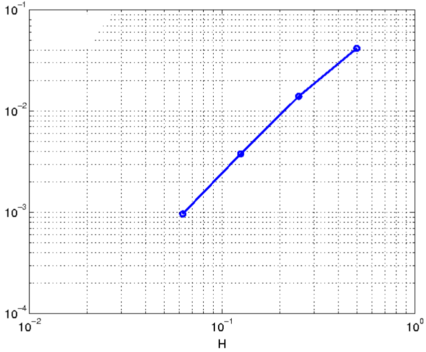
$$\boxed{\max_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \Pi_n^H f(x) \right| \leq \frac{H^{n+1}}{4(n+1)} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|}$$

où $H = \frac{b-a}{N}$, $x_k = a + kH$, $f \in C^{n+1}([a,b])$

Définition Soit p_H une approximation par morceaux de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sur des sous-intervalles de longueur H. On dit que la convergence est d'ordre q s'il existe une constante $C>0$ indépendante de H t.q.

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| f(x) - p_H(x) \right| \leq \boxed{C H^q}$$

5 (suite) On considère la fonction de Runge $f(x)$ sur $[-5, 5]$, on prend un nombre K croissant de sous-intervalles $K = 20, 40, 80, 160$ et on estime l'erreur d'interpolation commise en évaluant $|E_1^H f(x)|$ sur une grille très fine :

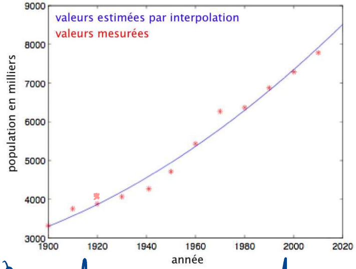


Erreur d'interpolation $\max_{x\in I} \mid E_n^H f(x) \mid$ de la fonction de Runge par le polynôme composite Π_1^H en fonction de H.
L'erreur $\max_{x\in I} \mid E_n^H f(x) \mid$ pour l'interpolation linéaire par morceaux se comporte comme CH^2 : ce résultat est en accord avec le théorème 1. De plus, si on calcule les rapports $\max_{x\in I} \mid E_n^H f(x) \mid / H^2$, on peut estimer la constante C.

LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS I

n+1 points $x_0, \dots, x_n$ (pas nécessairement distincts)

n+1 valeurs $y_0, \dots, y_n$



Si le nombre de données est grand (n+1), le polynome interpolant peut presenter des oscillations, ou peut être trop complexe à calculer. De plus il ne tiendrait pas compte des erreurs de mesure, ou de plusieurs mesures au même endroit.

On essay de representer la "loi" $x_k \to y_k$ par un polynome de degré m fixé. (prédefini, independant de n). On a $m \ll n$

La méthode des moindres carrés II

Définition On appelle polynôme aux moindres carrés de degré m $\hat{p}_m$ le polynôme de degré m tel que

$$\sum_{k=0}^{n} |y_k - \hat{p}_m(x_k)|^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |y_k - p_m(x_k)| \quad \forall p_m \in \mathbb{P}_m$$

Lorsque $y_i = f(x_i)$ alors on dit que $\hat{p}_m$ est l'approximation de f au sens des moindres carrés aux points $x_0, \dots, x_n$

La méthode des moindres carrés III

$p(x) = a_0 + \dots + a_m x^m$ qui satisfait $p(x_k) = y_k \quad k = 0, \dots, n$

$$a_0 + a_1 x_k + \dots + a_m x_k^m = y_k \quad k = 0, \dots, n$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^m \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_k & x_k^2 & x_k^m \\ & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^m \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \\ y_n \end{pmatrix}$$

$B\vec{a} = \vec{y} \qquad B_{(n+1)(m+1)}, \ \vec{a} \in \mathbb{R}^{m+1}, \ \vec{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$

$m < n$: il y a des grandes chances que le système soit incompatible

On peut essayer de résoudre l'équation $B\vec{a} = \vec{y}$ au sens des moindres carrés

La méthode des moindres carrés III

$B^T B \vec{a} = B^T \vec{y}$ système d'équations normales.

La solution du système d'équation normales donne les coefficients du polynome d'approximation des données au sens des moindres carrés :

si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ est solution de $B^T B \vec{a} = B^T \vec{y}$, alors

$\boxed{\hat{p}_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}$ minimise $\sum_{k=0}^{n} |y_k - p_m(x_k)|^2$