

Analyse Numérique SV

Interpolation

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025

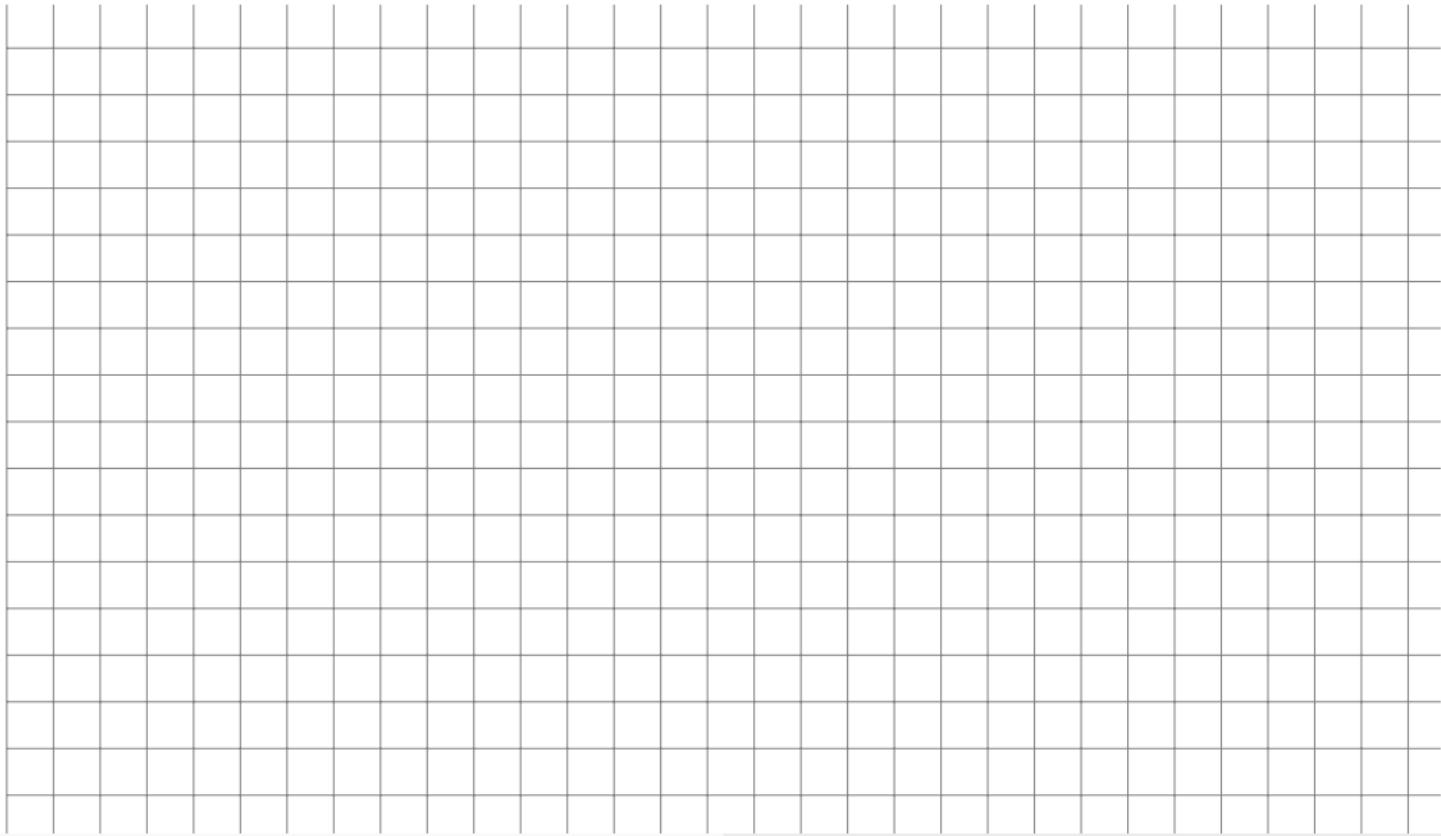
EPFL

Résumé |

- Interpolation
- Interpolation par morceaux
- Erreur d'interpolation
- différences entre Π_n et Π_n^H , rôles de n, h, N, H .



Résumé II



Exercice 1

- 1 On considère la fonction $f(x) = \sin(x)$ définie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\Pi_2 f(x)$ de degré 2 interpolant la fonction f aux nœuds $x_0 = 0, x_1 = \pi, x_2 = 3/2\pi$.
- 2 Calculer le polynôme de Lagrange $\Pi_3 f(x)$ de degré 3 interpolant la fonction f aux nœuds $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1.5$ et $x_3 = 3$. Quelle est sa valeur en $x = 1.5$?
- 3 Répéter les points a) et b) en utilisant la fonction $g(x) = 2x^2 + 3x + 9$. Que remarquez-vous ?
- 4 On connaît les valeurs d'une fonction $g(x)$ aux noeuds $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1.5, x_3 = 3$:

$$g(0) = 3, \quad g(0.5) = 1, \quad g(1.5) = 0, \quad g(3) = 6.$$

Estimer sa valeur en $x = 2$ en interpolant g par un polynôme de degré 3 aux points $x = 0, 0.5, 1.5, 3$.



Exercice 1, solution



Exercice 2

On considère la fonction

$$f(x) = e^{2x}, \quad x \in [0, 1].$$

Soit N un nombre entier, $H = 1/N$, et $\Pi_1^H f$ le polynôme composite linéaire par morceaux qui interpole la fonction f aux nœuds $x_i = iH$, $i = 0, 1, \dots, N$.

- Calculer le nombre minimal N de sous-intervalles pour que l'erreur d'interpolation $E_1^H(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - \Pi_1^H f(x)|$ soit inférieure à 10^{-4} .
- Soit $\Pi_n f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n qui interpole f aux nœuds $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n$. Est-ce que l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$? Est-ce que le nombre de nœuds nécessaires pour que l'erreur soit plus petite que 10^{-4} est du même ordre de grandeur que celui du point a)? Justifier vos réponses.



Exercice 2, solution

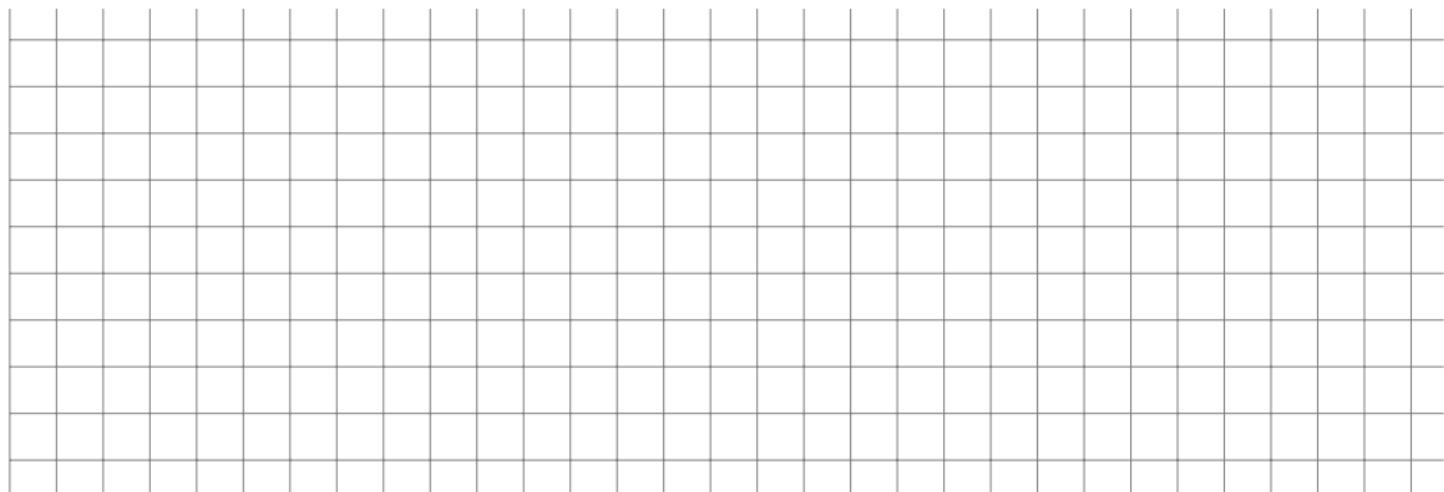


Exercice 3

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in I = [0, 1]$$

Déterminer le nombre minimal d'intervalles uniformes pour que le polynôme linéaire par morceaux qui interpole la fonction par intervalles donne une erreur $\leq 10^{-5}$.



Exercice 3, solution

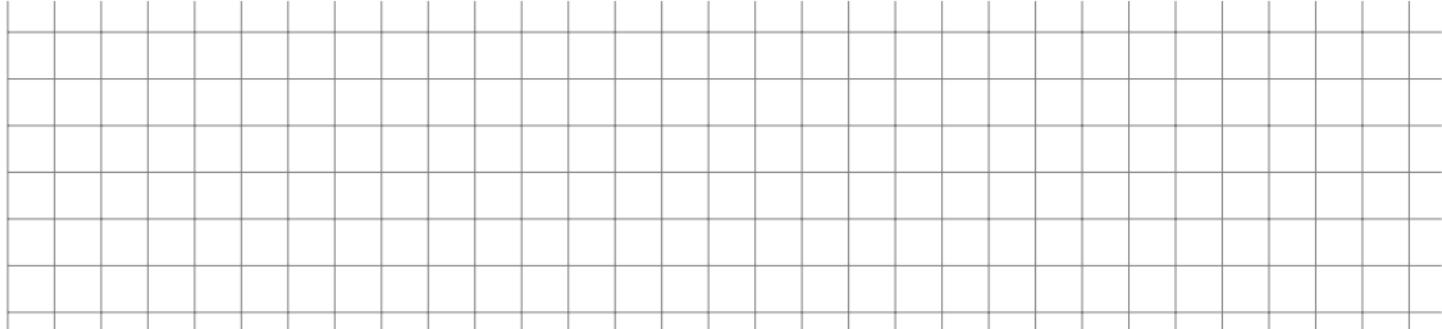


Exercice 4

On se donne la fonction :

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right), \quad x \in I = [0, 1].$$

- 1 Soit $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction aux nœuds équidistribués x_0, x_1, \dots, x_n . Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(f)$ sur l'intervalle I en fonction du degré n du polynôme et étudier son comportement quand $n \rightarrow \infty$.
- 2 Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que $E_n(f) \leq 10^{-4}$.
(Suggestion : essayer pour $n = 1, 2, 3, \dots$)



Exercice 4, solution

