

# Analyse Numérique SV

## Interpolation

Simone Deparis

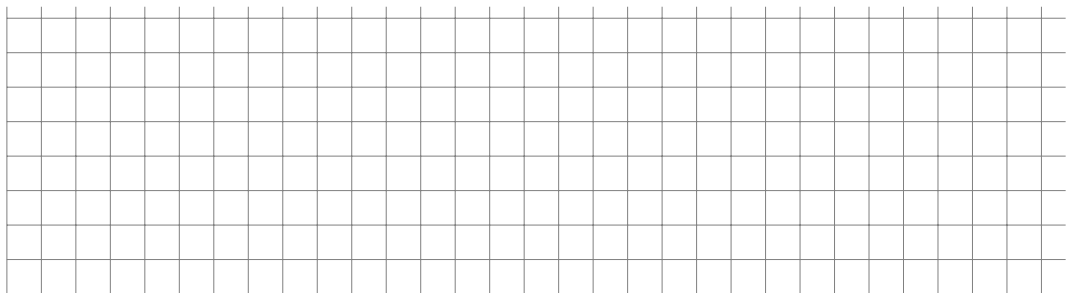
EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025

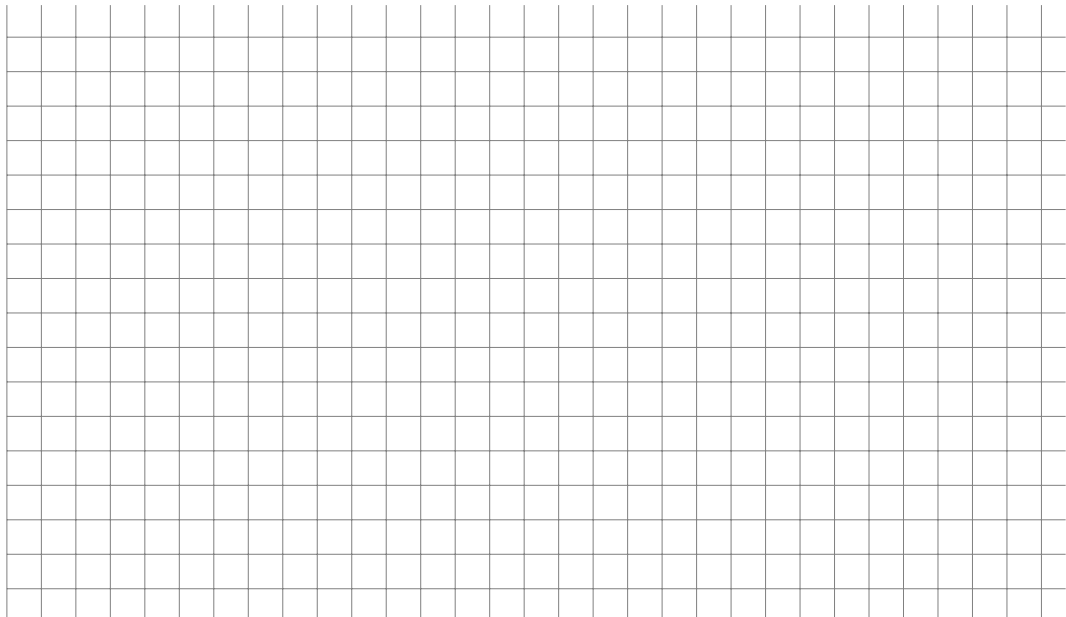


# Résumé I

- Interpolation
- Interpolation par morceaux
- Erreur d'interpolation
- différences entre  $\Pi_n$  et  $\Pi_n^H$ , rôles de  $n, h, N, H$ .



# Résumé II



# Exercice 1

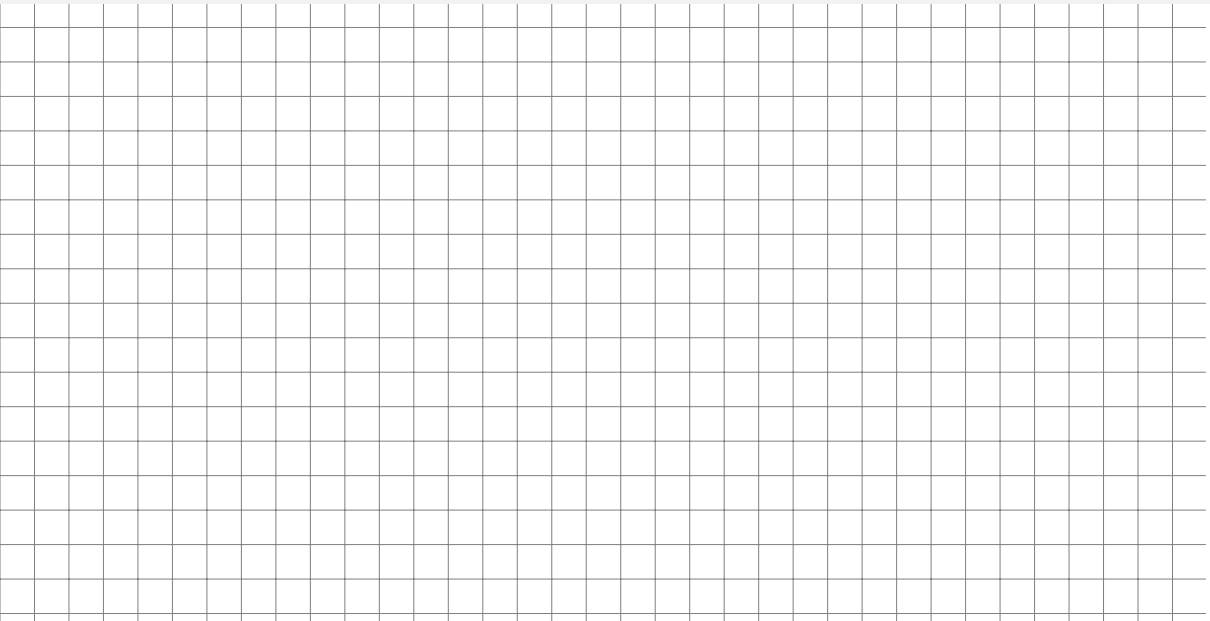
- 1 On considère la fonction  $f(x) = \sin(x)$  définie sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .  
Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange  $\Pi_2 f(x)$  de degré 2 interpolant la fonction  $f$  aux nœuds  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 3/2\pi$ .
- 2 Calculer le polynôme de Lagrange  $\Pi_3 f(x)$  de degré 3 interpolant la fonction  $f$  aux nœuds  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 1.5$  et  $x_3 = 3$ . Quelle est sa valeur en  $x = 1.5$  ?
- 3 Répéter les points a) et b) en utilisant la fonction  $g(x) = 2x^2 + 3x + 9$ . Que remarquez-vous ?
- 4 On connaît les valeurs d'une fonction  $g(x)$  aux noeuds  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 1.5$ ,  $x_3 = 3$  :

$$g(0) = 3, \quad g(0.5) = 1, \quad g(1.5) = 0, \quad g(3) = 6.$$

Estimer sa valeur en  $x = 2$  en interpolant  $g$  par un polynôme de degré 3 aux points  $x = 0, 0.5, 1.5, 3$ .



# Exercice 1, solution



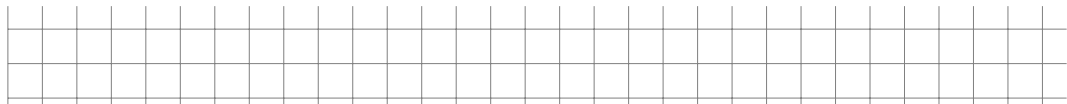
## Exercice 2

On considère la fonction

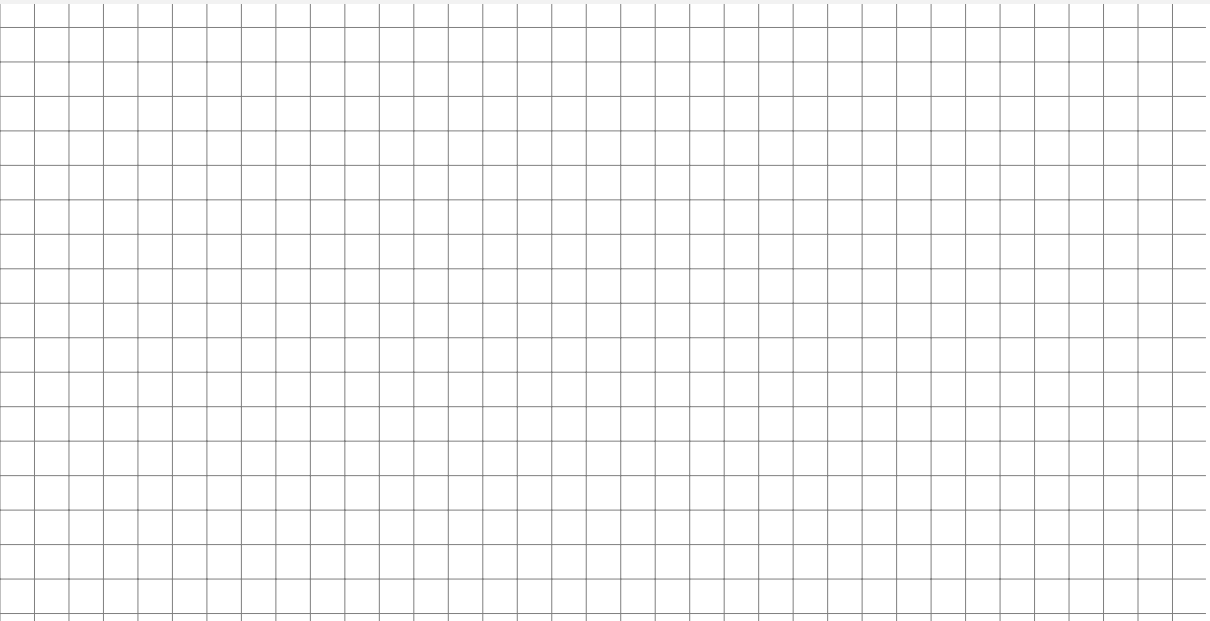
$$f(x) = e^{2x}, \quad x \in [0, 1].$$

Soit  $N$  un nombre entier,  $H = 1/N$ , et  $\Pi_1^H f$  le polynôme composite linéaire par morceaux qui interpole la fonction  $f$  aux nœuds  $x_i = iH$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

- Calculer le nombre minimal  $N$  de sous-intervalles pour que l'erreur d'interpolation  $E_1^H(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - \Pi_1^H f(x)|$  soit inférieure à  $10^{-4}$ .
- Soit  $\Pi_n f$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré  $n$  qui interpole  $f$  aux nœuds  $x_i = i/n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Est-ce que l'erreur d'interpolation  $E_n(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$  tend vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ ? Est-ce que le nombre de nœuds nécessaires pour que l'erreur soit plus petite que  $10^{-4}$  est du même ordre de grandeur que celui du point a)? Justifier vos réponses.



# Exercice 2, solution

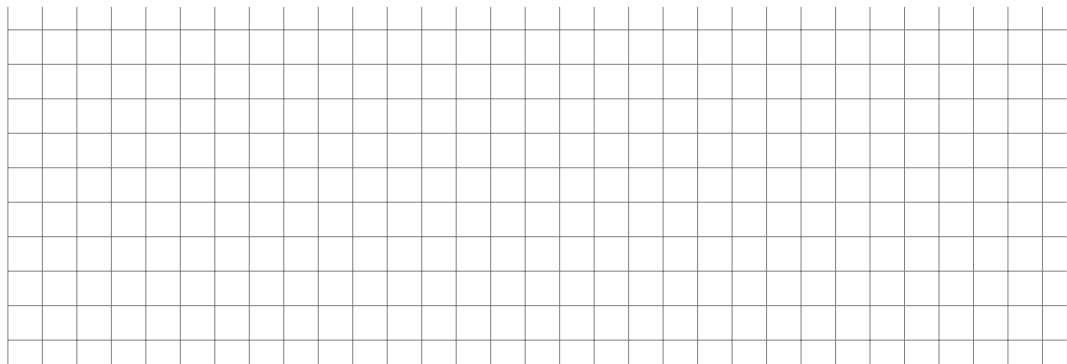


## Exercice 3

On considère la fonction

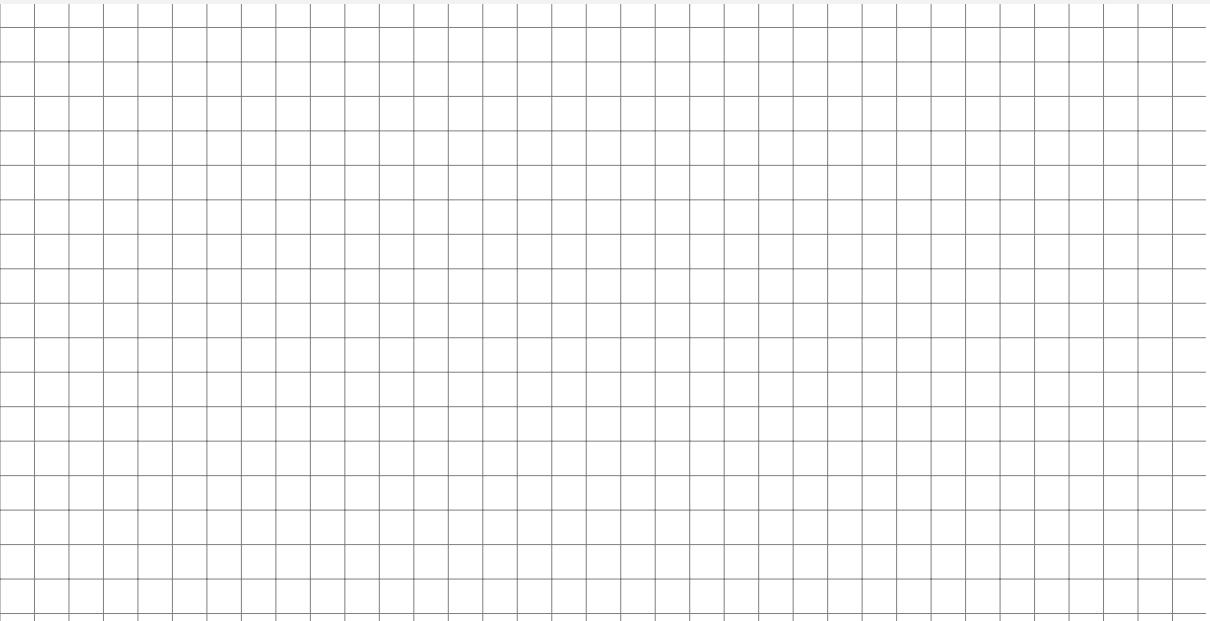
$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \in I = [0, 1]$$

Déterminer le nombre minimal d'intervalles uniformes pour que le polynôme linéaire par morceaux qui interpole la fonction par intervalles donne une erreur  $\leq 10^{-5}$ .





# Exercice 3, solution

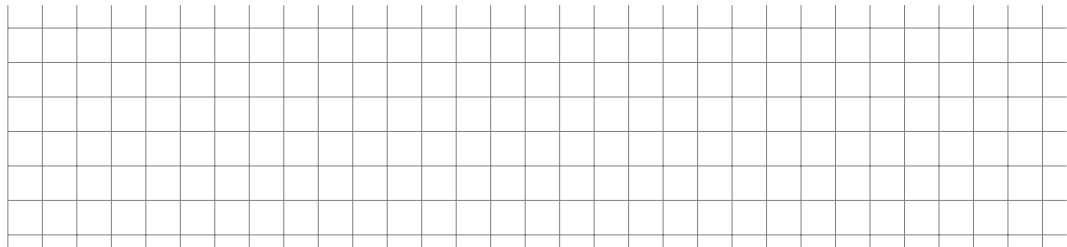


# Exercice 4

On se donne la fonction :

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right), \quad x \in I = [0, 1].$$

- 1 Soit  $\Pi_n f$  le polynôme interpolant la fonction aux nœuds équirépartis  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Estimer l'erreur d'interpolation  $E_n(f)$  sur l'intervalle  $I$  en fonction du degré  $n$  du polynôme et étudier son comportement quand  $n \rightarrow \infty$ .
- 2 Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que  $E_n(f) \leq 10^{-4}$ .  
(Suggestion : essayer pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ )



# Exercice 4, solution

