

Analyse Numérique SV

Approximation de données

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025

EPFL

Exercice 1

Nous avons des mesures y_0, y_1, \dots, y_n correspondant à des points x_0, x_1, \dots, x_n . Montrer que la droite de régression $y = a_0 + a_1x$, qui approche au sens des moindres carrés ces données, passe par le baricentre (\bar{x}, \bar{y}) du nuage de points (x_i, y_i) :

$$\bar{y} = a_0 + a_1 \bar{x}, \quad \text{où } \bar{x} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i.$$

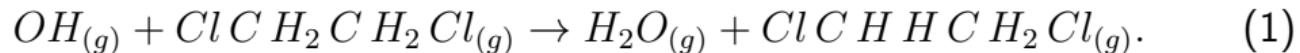


Exercice 1, solution



Exercice 2

On considères la réaction chimique suivante :



Pour étudier la vitesse de cette réaction chimique considérer la loi de Arrhenius :

$$k = A e^{-\frac{E_a}{RT}}, \quad (2)$$

où $R = 8.3144621 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ est la constante universelle des gaz parfaits.

Soient les données suivantes (Tableau 1) qui correspondent aux valeurs expérimentales de T et k :

$k \text{ [dm}^3 \text{ mol}^{-1} \text{ s}^{-1}\text{]}$	1.24	1.32	1.81	2.08	2.29	2.75
$T \text{ [K]}$	292	296	321	333	343	363

Valeurs expérimentales de T et k .

Déterminer les valeurs des constantes A (facteur pré-exponentiel) et E_a (l'énergie d'activation) de la loi d'Arrhenius à l'aide de la méthode des moindres carrés.

Exercice 2, solution



Exercice 3

Depuis <https://hss.ch/fr/2012/b/14> téléchargez les données de la population suisse dans le fichier Data/PopulationSuisse.csv :

Année	1860	1870	1880	1888	1900	1910	1920
Population	2506784	2654394	2924702	2917754	3315443	3753293	3880320
Année	1930	1941	1950	1960	1970	1980	1990
Population	4066400	4265703	4714992	5429061	6269783	6365960	6873687

Approximez l'évolution de la population avec un polynôme de degré $n = 1, 2, 3, 7$.

Ensuite faites l'hypothèse de croissance exponentielle de la population, c'est-à-dire $p(x) = Ce^{a_1 x}$ où C et a_1 sont des paramètres. Comment utiliser l'approximation polynomiale dans ce contexte ? Calculez les valeurs de C et a_1 .
Indications : Ici la population est positive, donc $C > 0$. On peut donc remplacer C avec e^{a_0} dans $p(x)$. Un polynôme $a_0 + a_1 x$ apparaît. Comment le retrouver dans les données ?

Voici quelques commandes utiles en Python

Exercice 3, solution

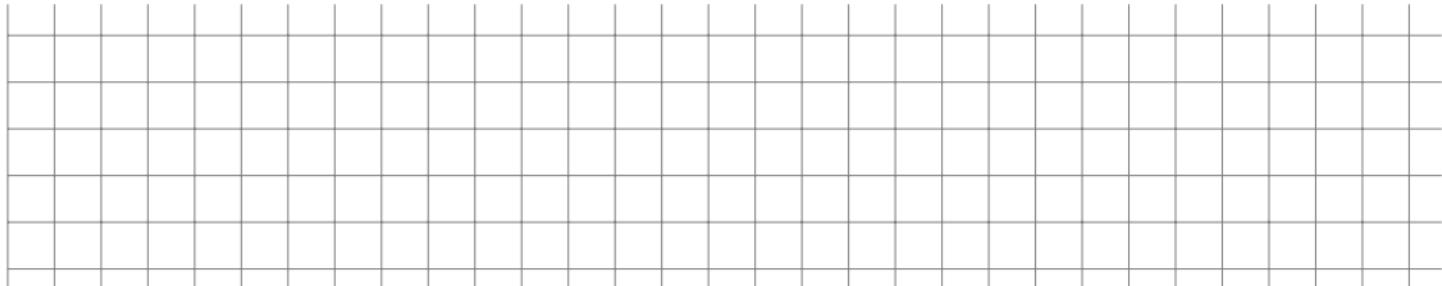


Exercice 4

On considère la fonction

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \sin(x).$$

Remarquez que cette fonction est la somme d'une fonction linéaire $f_0(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ et d'une perturbation périodique $f_p(x) = \sin(x)$. Calculer la droite de régression qui approche f lorsque on prend les échantillons $x_i = 2i\pi/3$, $y_i = f(x_i)$, pour $i = 0, 1, 2, 3$. Tracer un graphe qualitatif de la fonction f , de la droite f_0 et de la droite de régression (en utilisant éventuellement le résultat du point a). Est-ce que cette droite coïncide avec f_0 ? Discutez brièvement les différences.



Exercice 4, solution

