

# Analyse Numérique SV

## Équations non linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025



## Ex. 1 |

On se donne la fonction continue  $f(x) = \ln(x+1) - 2$  sur l'intervalle  $[4, 12]$ .

- 1 Montrer qu'il existe un zéro  $x^*$  pour la fonction  $f(x)$  dans l'intervalle  $[4, 12]$  et qu'il est unique.
- 2 En utilisant la méthode de bisection sur l'intervalle  $[4, 12]$ , estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le zéro  $x^*$  avec une tolérance  $tol = 10^{-10}$ .
- 3 On considère la méthode du point fixe  $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$ , avec

$$g(x^{(n)}) = x^{(n)} - (x^{(n)} + 1) [\ln(x^{(n)} + 1) - 2] .$$

Montrer que cette méthode est convergente au point fixe  $x^*$  et déterminer son ordre de convergence.

- 4 Trouver une constante  $C$  telle que

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leq C|x^{(n)} - x^*|^2$$

## Ex. 1 II

- 5 En supposant partir d'une valeur initiale  $x^{(0)}$  telle que  $|x^* - x^{(0)}| \leq 10^{-1}$ , trouver le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à  $10^{-10}$ .
- 6 On applique maintenant la méthode de bisection pour trouver une approximation  $\tilde{x}$  telle que  $|x^* - \tilde{x}| \leq 10^{-1}$  et ensuite la méthode de point fixe à partir de la valeur  $\tilde{x}$ . Estimer dans ce cas, le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inférieure à  $10^{-10}$ .



## Ex. 2 I

On veut calculer les solutions de l'équation

$f(x) = x/2 - \sin(x) + \pi/6 - \sqrt{3}/2 = 0$  dans l'intervalle  $[-\pi/2, \pi]$ . D'après le graphe de la Figure 1, on a deux zéros  $\alpha_1 \in I_1 = [-\pi/2, 0]$  et  $\alpha_2 \in I_2 = [\pi/2, \pi]$ .

- 1 Peut-on appliquer la méthode de la bisection pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où cela est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance  $tol = 10^{-10}$ , sur les intervalles  $I_1, I_2$ .
- 2 Écrire la méthode de Newton pour la fonction  $f$ . A l'aide du graphe de la fonction  $f$ , trouver pour quel zéro l'ordre de convergence de la méthode est égal à 2.

## Ex. 2 II

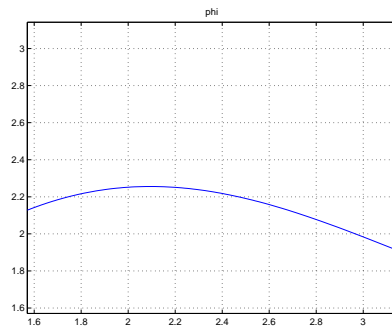
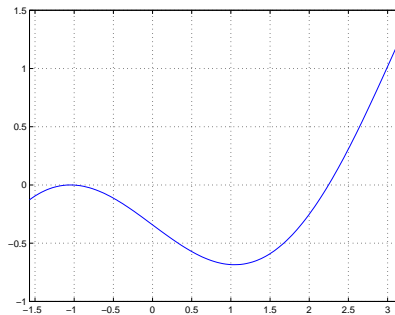
- 3 On considère maintenant la méthode de point fixe  $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$  avec

$$\phi(x^{(k)}) = \sin(x^{(k)}) + \frac{x^{(k)}}{2} - \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

pour calculer le zéro  $\alpha_2 \in I_2$ . Établir si cette méthode de point fixe est

- *localement convergente*, c.-à-d. que la méthode converge vers  $\alpha_2$  pourvu que  $x^{(0)}$  soit assez proche de  $\alpha_2$  ;
- *globalement convergente sur  $I_2$* , c.-à-d. que la méthode converge pour tout  $x^{(0)} \in I_2$ . Pour ce faire, considérer le graphe de la fonction  $\phi(x)$  sur l'intervalle  $I_2$ , Figure 1.

## Ex. 2 III



Graphes des fonctions  $f(x)$  (à gauche) et  $\phi(x)$  (à droite).

## Ex. 2 IV

- 4 On considère le zéro  $\alpha_2$  et la méthode de point fixe précédente. Montrer qu'il existe une constante positive  $0 < C < 1$  telle que

$$|x^{(k+1)} - \alpha_2| = |\phi(x^{(k)}) - \phi(\alpha_2)| \leq C|x^{(k)} - \alpha_2| ,$$

et calculer cette constante.

- 5 On considère les itérations  $x^{(k)}$  de la méthode de point fixe du point c) initialisée avec  $x^{(0)} = \pi/2$ . Montrer à partir de l'inégalité du point précédent qu'on a

$$|x^{(k)} - \alpha_2| \leq C^k |x^{(0)} - \alpha_2| ,$$

puis, utiliser ce résultat pour trouver le nombre d'itérations nécessaires pour que l'erreur  $|x^{(k)} - \alpha_2|$  soit plus petite que  $2^{-20}$ .



