Analyse Numérique SV
Équations non linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025

Newton (Série 1, Ex. 2, partie 3)

Soit $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x - 5$. On observe que :

$$f(1) = -6 < 0 \quad \text{et} \quad f(3) = 16 > 0 \, .$$

On a sûrement au moins un zéro $x^* \in [1, 3]$.

1. Montrer l'unicité du zéro $x^* \in [1, 3]$.
2. Écrire la méthode de Newton pour la fonction f.
3. En interprétant cette méthode comme une méthode de point fixe, montrer qu'elle est d'ordre 2. *(Cette partie sera à faire après avoir vu la section 1.4 des vidéos)*

Newton (Ex. 2, partie 3) I

Point fixe (Ex. 1)

On considère le problème de calculer $\sqrt{2}$.
Vérifier que $\alpha = \sqrt{2}$ est un point fixe de la fonction

$$\phi(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}.$$

Ensuite, prouver que pour $x^{(0)} \in [1, 2]$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq K^k |x^{(0)} - \alpha|, \quad \forall k \geq 0.$$

Quel est le comportement de la suite $\{x^{(k)}\}$ lorsque $k \to \infty$? Combien d'itérations de la méthode de point fixe sont nécessaires pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ qui soit exacte jusqu'au dixième chiffre après la virgule ? (Suggestion : il faut avoir une estimation de la constante K).

Convergence de la méthode de point fixe, rappel

Théorème (Convergence globale)

Supposons que $\phi(x)$ est continue sur $[a,b]$ et telle que $\phi(x) \in [a,b]$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors

- *il existe au moins un point fixe $\alpha \in [a,b]$ de ϕ.*

Si, de plus, il existe un $L < 1$ tel que $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$,
alors

- *ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$,*
- *la suite définie par $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k \geq 0$, converge vers α pour toute donnée initiale $x^{(0)}$ dans $[a,b]$.*

Si $\phi(x)$ est différentiable sur $[a,b]$ et $\exists K < 1$ tel que $|\phi'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b]$, alors la deuxième condition de la proposition (1) est satisfaite.

Point fixe (Ex. 1) I

Point fixe (Ex. 1), solution I

Les points fixes de $\phi(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2}$ sont les racines de

$$x = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2,$$

donc $\alpha = \sqrt{2}$ est bien un point fixe de ϕ.

Point fixe (Ex. 1), solution II

le graphe de la fonction $-\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{2}$ c'est une parabole, qui atteint son maximum en $x = 2$.
Cette parabole est donc croissante sur $[1, 2]$, ce qui peut être vérifié aussi en calculant la dérivée $\phi'(x)$:

$$\phi'(x) = \frac{2-x}{2} \geq 0 \quad \text{si} \quad x \in [1, 2].$$

Donc on aura

$$\phi(1) = \frac{5}{4} \leq \phi(x) \leq \phi(2) = \frac{3}{2} \quad \forall x \in [1, 2],$$

ce qui montre que l'hypothèse H1 est satisfaite (l'image de $[1, 2]$ selon ϕ est $[5/4, 3/2]$ qui est un sous-ensemble de $[1, 2]$).

Point fixe (Ex. 1), solution III

De plus, on a que :

$$x \in [1,2] \quad \Rightarrow \quad |\phi'(x)| \leq \frac{1}{2},$$

donc H2 est satisfaite avec $K = 1/2$.
Il est clair que l'on peut appliquer l'inégalité $|x^{(k)} - \alpha| \leq K|x^{(k-1)} - \alpha|$ en récurrence. On obtient

$$|x^{(k)} - \alpha| \leq K|x^{(k-1)} - \alpha| \leq K^2|x^{(k-2)} - \alpha| \leq \ldots \leq K^k|x^{(0)} - \alpha|.$$

Comme $0 < K < 1$, on a $K^k \to 0$ lorsque $k \to \infty$, donc

$$\lim_{k\to\infty} |x^{(k)} - \alpha| = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha.$$

Remarque

Calculer $\sqrt{2}$ revient aussi à trouver le zéro positif $\alpha = \sqrt{2}$ de la fonction

$$f(x) = x^2 - 2,$$

c'est-à-dire à résoudre une équation non linéaire.

- Quelles méthodes connaissez-vous pour approcher $\sqrt{2}$?
- Quels sont les avantages et les inconvénients ?

Point fixe (Ex. 2)

On considère la fonction $\phi(x) = ax(1 - x^2)$, a étant un paramètre réel.

1. Montrer que $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ si $0 \leq a \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. Trouver les valeurs positives de a telles que l'itération de point fixe

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \qquad k \geq 0 \tag{1}$$

   puisse approcher le point fixe $\alpha_1 = 0$.
3. Trouver la condition sous laquelle un deuxième point fixe $\alpha_2 > 0$ existe (dans l'intervalle $[0, 1]$) et déterminer les valeurs de a telles que l'itération (1) puisse approcher α_2.
4. Pour quelle valeur de a l'itération (1) peut-on approcher α_2 avec un ordre de convergence quadratique ?

Point fixe (Ex. 2), solution I

1. Pour $a = 0$, $\phi \equiv 0 \in [0, 1]$. Si $a > 0$, ϕ est une fonction strictement positive sur l'intervalle $(0, 1)$ et qui vaut zéro en $x = 0$ et $x = 1$. Pour trouver le point de maximum de ϕ en $(0, 1)$, on calcule

$$\phi'(x) = a(1 - 3x^2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Si on impose $\phi\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \leq 1$, on trouve $a \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Point fixe (Ex. 2), solution II

2. D'abord il faut contrôler que $\alpha = 0$ est un point fixe pour ϕ. En effet

$$\phi(0) = 0 \qquad \forall a.$$

Puis, on calcule la dérivée première de ϕ

$$|\phi'(x)| = a(1 - 3x^2)$$

On peut approcher le point fixe $\alpha_1 = 0$ si

$$|\phi'(0)| < 1 \quad \rightarrow \quad a < 1.$$

Point fixe (Ex. 2), solution III

3. On cherche maintenant si il existe un point $0 < \alpha_2 \leq 1$ tel que

$$\alpha_2 = \phi(\alpha_2).$$

On trouve

$$\alpha_2 = a\alpha_2(1 - \alpha_2^2) \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{a}} > 0.$$

Si on impose la condition $\alpha_2 \leq 1$, on a

$$\sqrt{1 - \frac{1}{a}} < 1 \quad \rightarrow \quad a > 1 \quad \left(\text{avec toujours } a \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Il faut aussi montrer que la dérivée de ϕ_2 en α_2 est inférieure à 1 en valeur absolue ([A écrire !])

Point fixe (Ex. 2), solution IV

Point fixe (Ex. 2), solution V

4 On a que l'iteration

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

peut approcher α_2 avec ordre 2 si $|\phi'(\alpha_2)| = 0$. On a donc que

$$0 = |\phi'(\alpha_2)| = a|(1 - 3\alpha_2^2)|, \qquad a > 0$$

si $\alpha_2^* = \sqrt{\frac{1}{3}}$.
Ce point fixe est atteint en correspondance de

$$1 = a(1 - (\alpha_2^*)^2) \quad \to a = \frac{3}{2}.$$

Newton (Ex. 3)

Soit α une racine double de la fonction f, c'est-à-dire $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$.

1. En tenant compte du fait qu'on peut écrire la fonction f comme

$$f(x) = (x - \alpha)^2 h(x) \qquad \text{où} \quad h(\alpha) \neq 0 \,,$$

   vérifier que la méthode de Newton pour l'approximation de la racine α est seulement d'ordre 1. [Conseil : écrire la méthode sous la forme de point fixe et calculer $\Phi'(\alpha)$]

2. On considère la méthode de Newton modifiée suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - 2\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

   Vérifier que cette méthode est au moins d'ordre 2 si l'on veut approcher α.

Newton (Ex. 3) I

1. On regarde la méthode de Newton comme une méthode de point fixe :

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}) = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Si $0 < |\phi'(\alpha)| < 1$ la méthode est d'ordre 1, tandis que si $\phi'(\alpha) = 0$ elle est au moins d'ordre 2. On a

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

où

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)^2 h(x) \\ f'(x) &= (x-\alpha)\left[2h(x) + (x-\alpha)h'(x)\right] \\ f''(x) &= 2h(x) + 4(x-\alpha)h'(x) + (x-\alpha)^2 h''(x). \end{aligned}$$

Newton (Ex. 3) II

Donc

$$\begin{aligned}
\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} &= \frac{(x-\alpha)^2 h(x)\left[2h(x)+4(x-\alpha)h'(x)+(x-\alpha)^2h''(x)\right]}{(x-\alpha)^2\left[2h(x)+(x-\alpha)h'(x)\right]^2},\\
&= \frac{h(x)\left[2h(x)+4(x-\alpha)h'(x)+(x-\alpha)^2h''(x)\right]}{\left[2h(x)+(x-\alpha)h'(x)\right]^2},\\
\phi'(\alpha) &= \frac{h(\alpha)\left[2h(\alpha)\right]}{\left[2h(\alpha)\right]^2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et la méthode est d'ordre 1.

Newton (Ex. 3) III

2. Pour la méthode de Newton modifiée, on a

$$\phi(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\phi'(x) = 1 - 2\frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = -1 + 2\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

On vient de calculer le terme $f(x)f''(x)/f'(x)^2$ et on a vu qu'il converge vers $1/2$ si $x \to \alpha$; on a finalement

$$\phi'(\alpha) = -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

La méthode est donc au moins d'ordre 2.