Analyse Numérique SV

Équations non linéaires

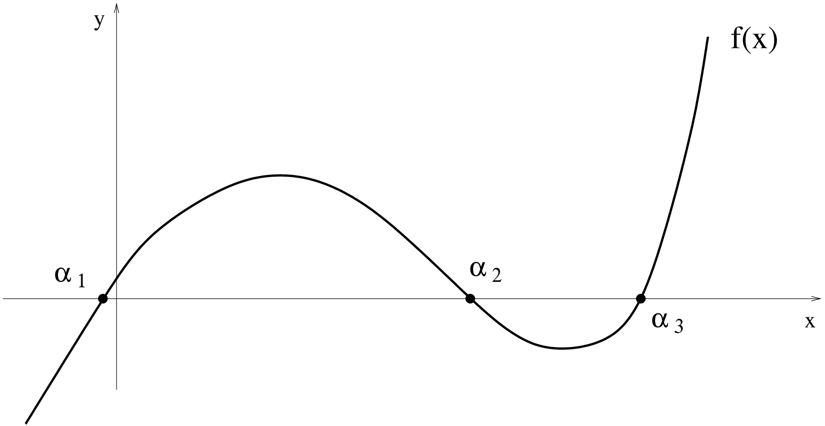
Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2021

Équations non linéaires

Objectif : trouver les zéros de fonctions non linéaires, c-à-d les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $f(\alpha) = 0$.

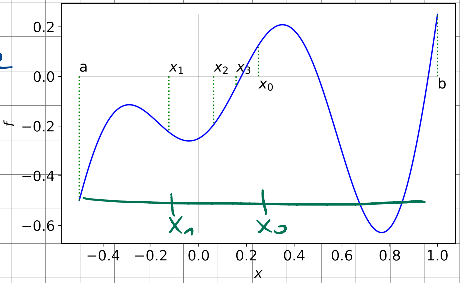


Méthode de dichotomie ou bissection I

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue qui change de signe entre a et b

$f(a) \cdot f(b) < 0$. Cette fonction admet au moins un zéro α en $[a,b]$.

La méthode de dichotomie construit une suite $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ telle que $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha$



On pose $x^{(0)} = \dfrac{a+b}{2}$

- si $f(x^{(0)}) = 0$, alors $\alpha = x^{(0)}$
- si $f(x^{(0)}) f(a) < 0$ alors $\alpha \in [a, x^{(0)}]$, on définit $a^{(1)} = a$, $b^{(1)} = x^{(0)}$
- si $f(x^{(0)}) f(b) < 0$ alors $\alpha \in [x^{(0)}, b]$, on définit $a^{(1)} = x^{(0)}$ $b^{(1)} = b$

Algorithme de bissection

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue tq $f(a)f(b) < 0$

On pose $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$. Pour $k = 0, 1, \dots$

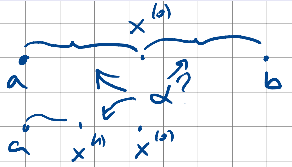
1. $x^{(k)} = \frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$
2. si $f(x^{(k)}) = 0$, alors $x^{(k)}$ est le zéro cherché. Autrement :
   1. soit $f(x^{(k)})f(a^{(k)}) < 0$, alors le zéro $\alpha \in [a^{(k)}, x^{(k)}]$.
      On pose $a^{(k+1)} = a^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = x^{(k)}$
   2. soit $f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$, alors le zéro $\alpha \in [x^{(k)}, b^{(k)}]$.
      On pose $a^{(k+1)} = x^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = b^{(k)}$

Critère d'arrêt et erreur

$$e^{(0)} = |\alpha - x^{(0)}| \leq \frac{b-a}{2^{1+0}}$$

$$e^{(1)} = |\alpha - x^{(1)}| \leq \frac{b-a}{2^2} = \frac{b-a}{2^{1+1}}$$

$$\boxed{e^{(k)} = |\alpha - x^{(k)}| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}}$$



Si on désire que $e^{(k)}$ soit plus petit qu'une tolérance $tol > 0$ donnée:

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} < tol \iff \frac{b-a}{tol} < 2^{k+1} \iff \log_2 \frac{b-a}{tol} < k+1$$

Si on choisi $\boxed{k > \log_2 \frac{b-a}{tol} - 1}$, alors $\boxed{|x^{(k)} - \alpha| \leq tol}$

Exemple

On veut approcher le zéro de la fonction $f(x) = \sin(2x) - 1 + x$ sur l'intervalle $[-3, 3]$ avec une erreur de 10^{-3}. Quelles sont les premières approximations ? Combien d'itération faudra-t-il faire si on désire une précision de 10^{-4} ?

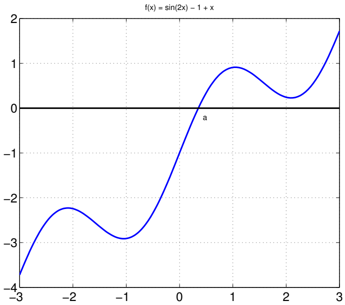
$$f : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin 2x - 1 + x$$

f : continue car sin est continue et la somme de fct continue est continue.

$f(-3) = -3,\dots$
$f(3) = 1,\dots$
$\Big\}$ f change de signe en $[-3,3]$

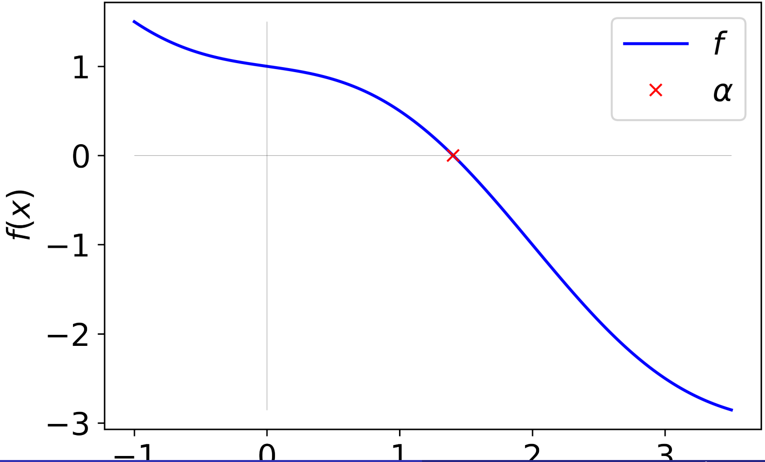
f admet au moins un zéro en $[-3,3]$ et la méthode de dichotomie permet de l'approcher.

$tol = 10^{-4}$



Zéro d'une fonction, Méthode de Newton

Objectif : trouver les zéros de fonctions (ou systèmes) non linéaires, c-à-d les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $f(\alpha) = 0$.



Méthode de Newton (ou Newton-Raphson)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $C^{(1)}$ de préférence.

Soit $x^{(0)}$ un point donné. On considère la droite qui approchi f en $x^{(0)}$:

Dévl. Taylor : $f(x) = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + O(|x - x^{(0)}|)$

Droite Tg en $x^{(0)}$: $y = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(x - x^{(0)})$

On définit $x^{(1)}$ t.q. $y = 0$: $f(x^{(0)}) = -f'(x^{(0)})(x - x^{(0)})$, $x^{(1)} = x^{(0)} - \dfrac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$

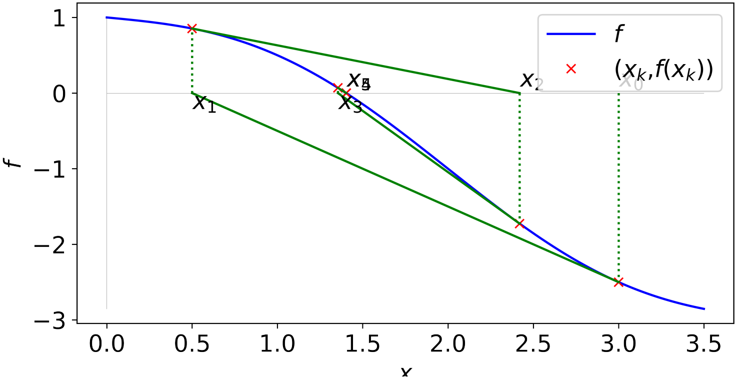
Pour $k = 1, 2, \ldots$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Si $f'(x^{(k)}) \neq 0$!

Méthode de Newton

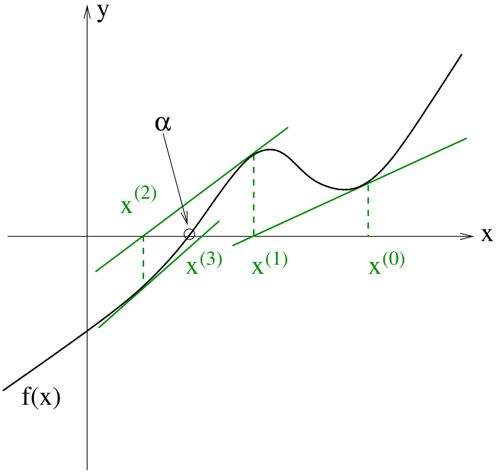
En partant du point $x^{(0)}$, la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers le zéro de f

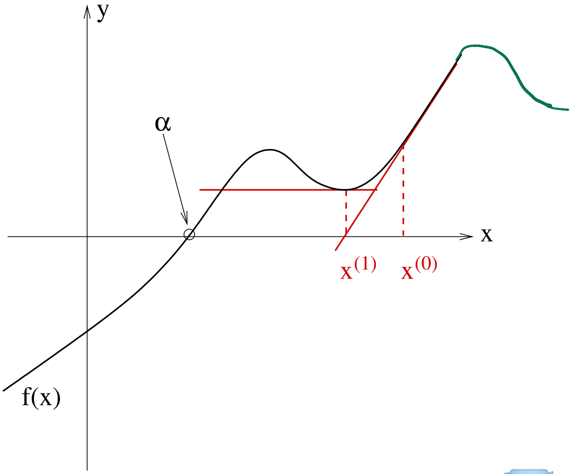


Convergence de la méthode de Newton

Est-ce que cette méthode converge ?

- Cela dépend des propriétés de la fonction ;
- Cela dépend du point initial.





Méthode de point fixe

Un procédé général pour trouver le zéro d'une fonction f consiste à transformer le problème en un problème équivalent $x = \phi(x)$.

La fonction ϕ doit respecter la propriété : $\alpha = \phi(\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$

Le point α s'appelle point fixe de ϕ.

La méthode du point fixe appliquée à ϕ s'écrit :

donné $x^{(0)}$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\quad x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$

Si ϕ est continue et $\{x^{(k)}\}_k$ converge, alors $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$

et $\phi(\alpha) = \alpha$

Méthode de point fixe

ϕ : on cherche α : $\phi(\alpha)=\alpha$. La méthode de point fixe s'écrit :

$x^{(0)}$ donné, Pour $k=0,1,\ldots$ $x^{(k+1)}=\phi(x^{(k)})$

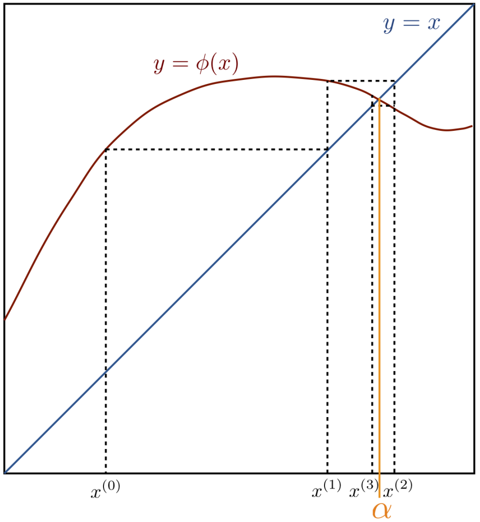
Prop : Si ϕ est continue et $\{x^{(k)}\}_{k=0,\ldots}$ converge, alors $\alpha=\lim_{k\to\infty} x^{(k)}$ est un point fixe de ϕ

Preuve : $\{x^{(k)}\}$ converge, soit $\alpha=\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \in \mathbb{R}$

$$\phi(\alpha)=\phi\left(\lim_{k\to\infty} x^{(k)}\right) \underset{\text{cont}}{=} \lim_{k\to\infty}\phi(x^{(k)}) \underset{\text{pt fixe}}{=} \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)}=\alpha$$

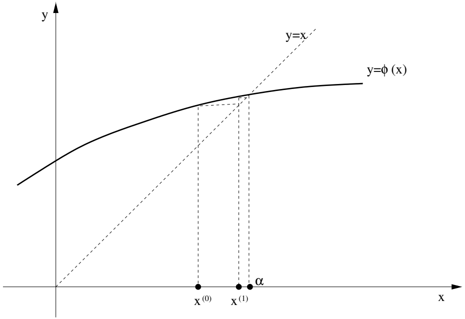
Donc $\phi(\alpha)=\alpha$, c.-à-d α est un point fixe de ϕ $\boxtimes$

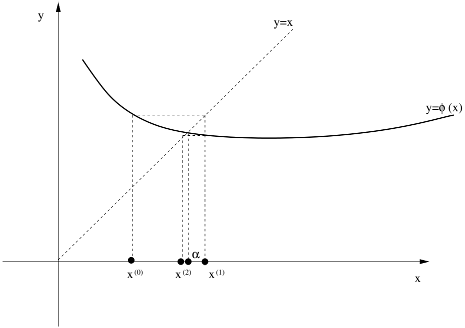
En partant du point $x^{(0)}$, la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers le point fixe α



Quelques exemples sur comment la valeur de $\mid \phi'(\alpha) \mid$ influence la convergence.
Cas **convergents** :

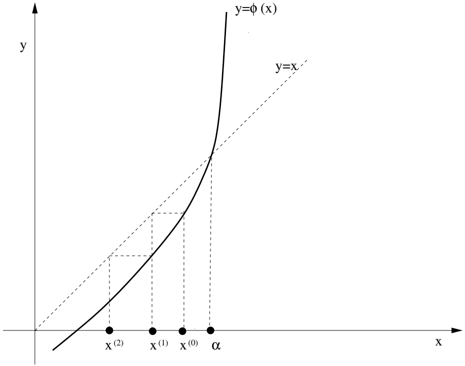
$$0 < \phi'(\alpha) < 1, \qquad -1 < \phi'(\alpha) < 0.$$

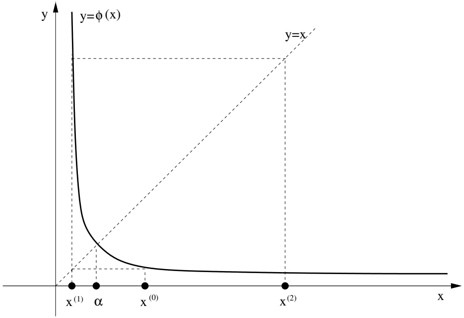




Cas **divergents** :

$$\phi'(\alpha) > 1, \qquad \phi'(\alpha) < -1.$$





Convergence de la méthode de point fixe

Théorème (Convergence globale)

Supposons que $\phi(x)$ est $\boxed{\text{continue}}$ sur $[a,b]$ et telle que

$\phi(x) \in [a,b]$ pour tout $x \in [a,b]$. $\phi : [a,b] \to [a,b]$

. Alors il existe au moins un point fixe $\alpha \in [a,b]$ de ϕ.

Si, de plus, il existe un $\underline{L<1}$ t.q. $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$

pour tout $x_1, x_2 \in [a,b]$ ϕ est une contraction

. ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$

. la suite $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k \geq 0$ converge vers α pour tout $x^{(0)} \in [a,b]$

1. ϕ est continue, donc aussi $g(x) = \phi(x) - x$ $\qquad \phi : [a,b] \to [a,b]$

$g(a) = \phi(a) - a$, mais $\phi(a) \in [a,b]$, donc $g(a) = \phi(a) - a \geq 0$

$g(b) = \phi(b) - b$, mais $\phi(b) \in [a,b]$, donc $g(b) \leq 0$

si $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$, on a le point fixe en a ou b.

si $g(a) \neq 0 \neq g(b)$, on a $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$, g continue.

Donc il y a au moins un zéro α de g dans $[a,b]$, $g(\alpha) = 0$.

$g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha = 0$ donc $\phi(\alpha) = \alpha$. α est un point fixe de ϕ

2. soient $\alpha_1, \alpha_2 \in [a,b]$ deux points fixes de ϕ. $\qquad$ si $|\alpha_1 - \alpha_2| \neq 0$

ϕ contraction $\qquad L<1$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq L\,|\alpha_1 - \alpha_2| \begin{cases} < |\alpha_1 - \alpha_2| \\ \text{ou } |\alpha_1 - \alpha_2| = 0 \end{cases}$$

donc $|\alpha_1 - \alpha_2| = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2$

3. soit $x^{(0)} \in [a,b]$ et $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$

$L < 1$

$$0 \leq |x^{(k+1)} - \alpha| = |\phi(x^{(k)}) - \phi(\alpha)| \leq L|x^{(k)} - \alpha|$$

$$\leq L^2 |x^{(k-1)} - \alpha| \leq \dots \leq L^{k+1} |x^{(0)} - \alpha|$$

Puisque $L<1$ $\lim_{k\to\infty} |x^{(k+1)} - \alpha| \leq \lim_{k\to\infty} \underbrace{L^{k+1}}_{<1} \underbrace{|x^{(0)} - \alpha|}_{\text{const}} = 0$

pour tout $x^{(0)} \in [a,b]$, la limite de $\{x^{(k)}\}$ existe et est égale au point fixe α.

$\square$

Convergence de la méthode de point fixe

Théorème (Convergence globale)

Supposons que $\phi \in C^1([a,b])$, $\phi : [a,b] \to [a,b]$ et que $\exists K < 1$ t.q. $|\phi'(x)| < K \; \forall x \in [a,b]$

Alors il existe un point fixe α de ϕ unique dans $[a,b]$ et la suite $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ converge vers α pour tout $x^{(0)} \in [a,b]$.

De plus
$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha)$$

si $\phi(x) \in [a,b]$ pour $x \in [a,b]$

Remarque

Si $\phi(x)$ est différentiable sur $[a, b]$ et

$$\exists K < 1 \text{ tel que } |\phi'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b],$$

alors la deuxième condition de la proposition (2) est satisfaite (mais pas nécessairement la première !). Cette hypothèse est plus forte, mais elle est plus souvent utilisée en pratique car elle est plus aisée à vérifier.

Ordre de convergence

Définition

Pour une suite de nombres réels $\{x^{(k)}\}$ qui converge, $x^{(k)} \to \alpha$, on dit que la convergence vers α est linéaire s'il existe une constante $C < 1$ telle que, pour k suffisamment grand,

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid .}$$

$$\frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|} \leq C$$

Ordre de convergence

Définition

Pour une suite de nombres réels $\{x^{(k)}\}$ qui converge, $x^{(k)} \to \alpha$, on dit que la convergence vers α est linéaire s'il existe une constante $C < 1$ telle que, pour k suffisamment grand,

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid .}$$

On dit que la convergence est quadratique, s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid^2 .}$$

Ordre de convergence

Définition

Pour une suite de nombres réels $\{x^{(k)}\}$ qui converge, $x^{(k)} \rightarrow \alpha$, on dit que la convergence vers α est linéaire s'il existe une constante $C < 1$ telle que, pour k suffisamment grand,

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid .}$$

On dit que la convergence est quadratique, s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid^2 .}$$

En général, la convergence est d'ordre p, $p \geq 1$, s'il existe une constante $C > 0$ (avec $C < 1$ lorsque $p = 1$) telle que

$$\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid^p .$$

Convergence locale

Théorème (Convergence locale)

Soient ϕ une fonction continue et continuellement *différentiable sur $[a, b]$ et α un point fixe de ϕ. Si $| \phi'(\alpha) | < 1$, alors*

- *il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x^{(0)} \in [a, b]$ avec $| x^{(0)} - \alpha | \leq \delta$, la suite $\{x^{(k)}\}$ définie par $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ converge vers α lorsque $k \to \infty$.*

De plus, on a

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha).}$$

Si $|\phi'(\alpha)| < 1$, pour une constante $|\phi'(\alpha)| < C < 1$, si k est suffisamment grand, alors $|x^{(k+1)} - \alpha| \leq C |x^{(k)} - \alpha|$

(Convergence linéaire avec constante $|\phi'(\alpha)| < C < 1$

Théorème (convergence locale et quadratique)

Soient ϕ une fonction deux fois continûment *différentiable sur $[a, b]$ et α un point fixe de ϕ. On considère $x^{(0)}$ dans l'ensemble de convergence locale. Si $\phi'(\alpha) = 0$ et $\phi''(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction d'itération ϕ est d'ordre 2 et*

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{\phi''(\alpha)}{2}.}$$

Démonstration.

Dév. de Taylor en α :

$$x^{(k+1)} - \alpha = \phi(x^{(k)}) - \phi(\alpha) = \overbrace{\phi'(\alpha)}^{=0}(x^{(k)} - \alpha) + \frac{\phi''(\eta)}{2}(x^{(k)} - \alpha)^2$$

$$x^{(k+1)} - \alpha = \frac{\phi''(\eta_k)}{2}(x^{(k)} - \alpha)^2 \quad \text{où } \eta_k \in [x^{(k)}, \alpha] \text{ ou } [\alpha, x^{(k)}]$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\phi''(\eta_k)}{2} = \frac{\phi''(\alpha)}{2} \quad \text{car } \eta_k \to \alpha,\ x^{(k)} \to \alpha$$

A propos de la méthode de Newton I

On est intéressé à trouver $\alpha : f(\alpha) = 0$.

Méthode de Newton : donné un $x^{(0)}$, $k = 0, 1, \dots$ $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

Soit $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Alors les itérations de point fixe associées à ϕ sont exactement les itérations de Newton associées à f.

$\phi(\alpha) = \alpha \iff f(\alpha) = 0$ (exercice)

$$\phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

donc $\phi'(\alpha) = 1 - \dfrac{f'(\alpha)^2 - 0}{f'(\alpha)^2} = 1 - 1 = 0$

$\boxed{\text{Si } f'(\alpha) \neq 0}$

Exercice : $\phi''(\alpha) = \dfrac{f''(\alpha)}{2 f'(\alpha)}$.

Si $f''(\alpha) \neq 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$, alors $\phi''(\alpha) \neq 0 \implies$ convergence d'ordre 2.

A propos de la méthode de Newton II

$$\phi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Théorème (convergence de Newton)

Soit $f \in C^2$, α t.q. $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$.

Alors la méthode de Newton converge à l'ordre 2 pour tout $x^{(0)}$ dans un voisinage de α.

On a aussi que $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{f''(\alpha)}{2 f'(\alpha)}$

Définition

On dit qu'un zéro α de f est de multiplicité m, $m \in \mathbb{N}$ si
$f(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad$ et $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
Un zéro de multiplicité $m = 1$ est appelé zéro simple.

Remarque

Si $f'(\alpha) = 0$, la convergence de la méthode de Newton est seulement linéaire, pas quadratique. On considère alors la méthode de Newton modifiée :

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots.} \tag{1}$$

avec m la multiplicité de α. Cette méthode est d'ordre 2.

Définition

On dit qu'un zéro α de f est de multiplicité m, $m \in \mathbb{N}$ si
$f(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et } f^{(m)}(\alpha) \neq 0.$
Un zéro de multiplicité $m = 1$ est appelé zéro simple.

Remarque

Si $f'(\alpha) = 0$, la convergence de la méthode de Newton est seulement linéaire, pas quadratique. On considère alors la méthode de Newton modifiée :

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots .} \tag{1}$$

avec m la multiplicité de α. Cette méthode est d'ordre 2.

Si la multiplicité m de α n'est pas connue, il y a d'autres méthodes, *des méthodes adaptatives*, qui permettent de récupérer l'ordre quadratique de la convergence.

Critères d'arrêt pour le point fixe I

Méthode point fixe : $\alpha = \phi(\alpha)$, $x^{(0)}$, $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$

Quand s'arrêter? erreur à l'étape k: $e^{(k)} = \alpha - x^{(k)}$

$$e^{(k+1)} = \alpha - x^{(k+1)} = \phi(\alpha) - \phi(x^{(k)}) = \phi'(\xi^{(k)}) e^{(k)}$$

avec $\xi^{(k)}$ entre α et $x^{(k)}$.

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \underbrace{x^{(k+1)} - \alpha}_{-e^{(k+1)}} + \underbrace{\alpha - x^{(k)}}_{e^{(k)}} = e^{(k)} - e^{(k+1)} = (1 - \phi'(\xi^{(k)})) e^{(k)}$$

Si $\phi'(\xi^{(k)}) \neq 1$ on peut écrire: $e^{(k)} = \dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{1 - \phi'(\xi^{(k)})}$

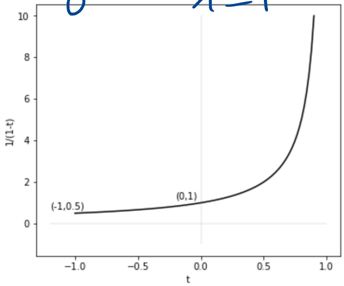
Si $x^{(k)}$ est proche de α et ϕ' est continue, on peut approcher

$$\phi'(x^{(k)}) \simeq \phi'(\xi^{(k)})$$

Critères d'arrêt pour le point fixe II

$$e^{(k)} = \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{1 - \phi'(\xi^{(k)})} = \gamma(\phi'(\xi^{(k)}))\,(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{1-t}$$



$$\begin{cases} \text{Si } t < 0, \ \gamma(t) \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \text{Si } t \simeq 0, \ \gamma(t) \simeq 1. \end{cases}$$

Si $\phi'(\xi^{(k)}) < \cancel{1}\ 0$ ou $\simeq 0$, alors

$$|e^{(k)}| \leq |x^{(k+1)} - x^{(k)}|$$

Si on désire une erreur $|e^{(k)}| < tol$, il suffit de vérifier

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < tol.$$

Critères d'arrêt pour Newton

Pour Newton, si $f'(\alpha) \neq 0$. (Rappel : ici $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$)

$\phi'(\alpha) = 0$ et l'incrément est très proche de l'erreur.

Donc un critère d'arrêt optimal pour Newton est

$$|e^{(k)}| \simeq |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \text{Tol}.$$