Analyse Numérique SV

Équations non linéaires

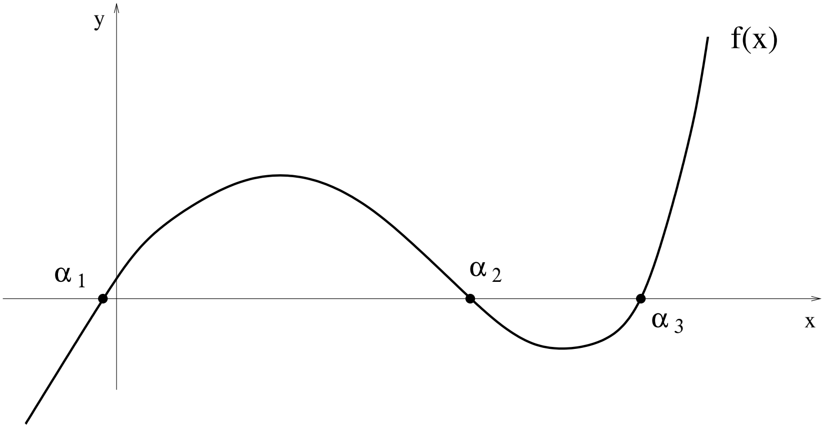
Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

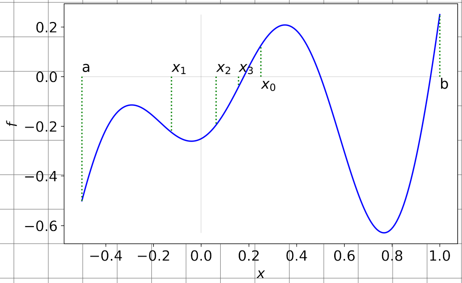
Printemps 2021

Équations non linéaires

Objectif : trouver les zéros de fonctions non linéaires, c-à-d les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $f(\alpha) = 0$.



Méthode de dichotomie ou bissection I

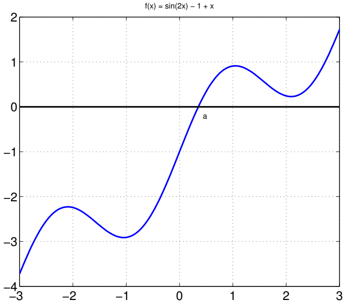


Méthode de dichotomie ou bissection II

Critère d'arrêt et erreur

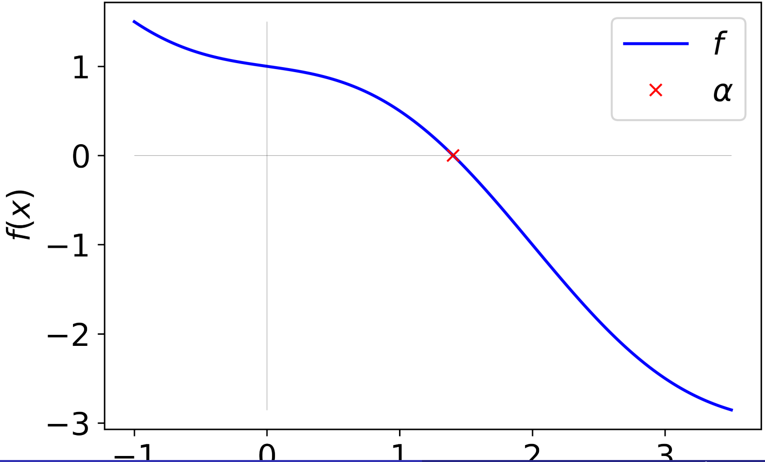
Exemple

On veut approcher le zéro de la fonction $f(x) = \sin(2x) - 1 + x$ sur l'intervalle $[-3, 3]$ avec une erreur de 10^{-3}. Quelles sont les premières approximations ? Combien d'itération faudra-t-il faire si on désire une précision de $10^{-}4$?



Zéro d'une fonction, Méthode de Newton

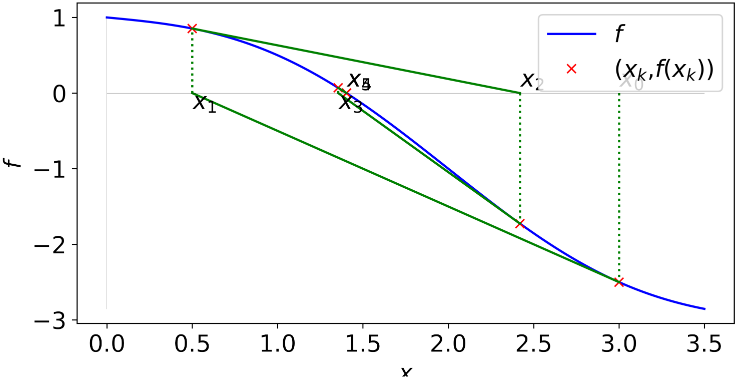
Objectif : trouver les zéros de fonctions (ou systèmes) non linéaires, c-à-d les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $f(\alpha) = 0$.



Méthode de Newton (ou Newton-Raphson)

Méthode de Newton

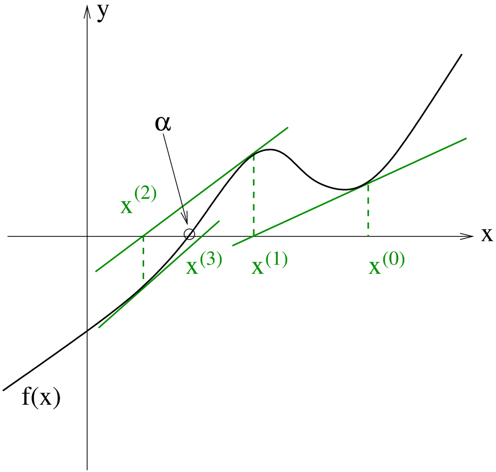
En partant du point $x^{(0)}$, la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers le zéro de f

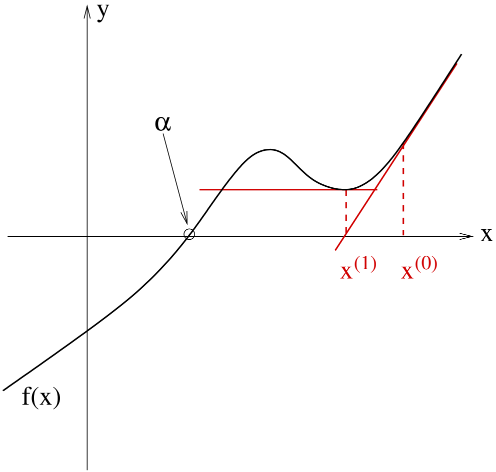


Convergence de la méthode de Newton

Est-ce que cette méthode converge ?

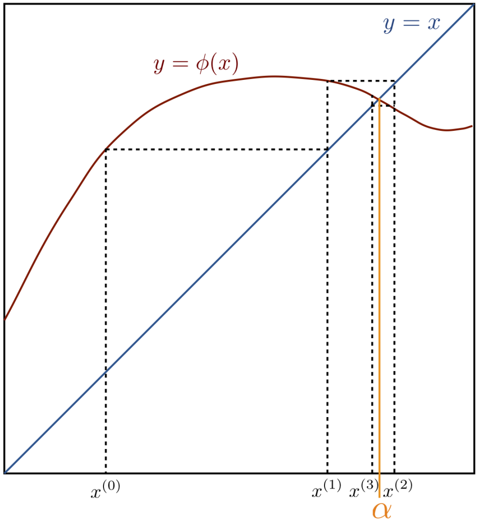
- Cela dépend des propriétés de la fonction ;
- Cela dépend du point initial.





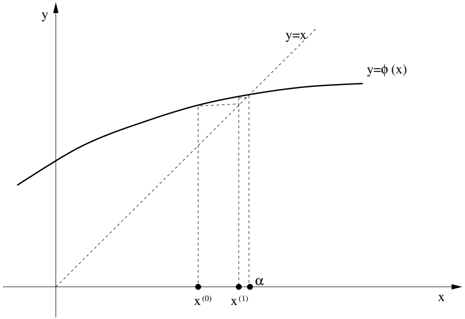
Méthode de point fixe

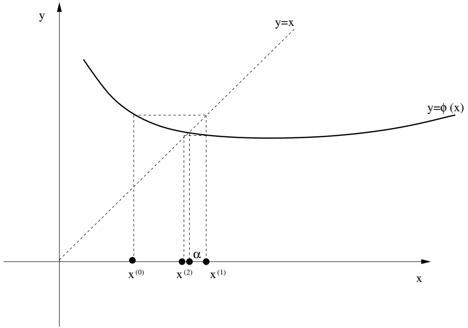
En partant du point $x^{(0)}$, la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers le point fixe α



Quelques exemples sur comment la valeur de $\mid \phi'(\alpha) \mid$ influence la convergence.
Cas **convergents** :

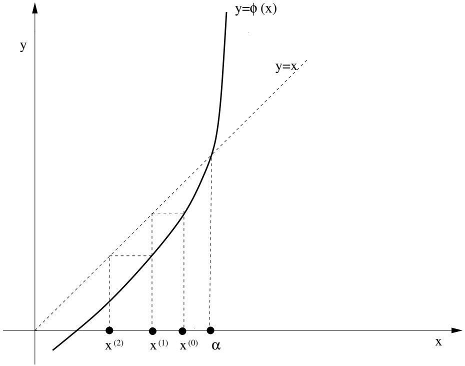
$$0 < \phi'(\alpha) < 1, \qquad\qquad -1 < \phi'(\alpha) < 0.$$

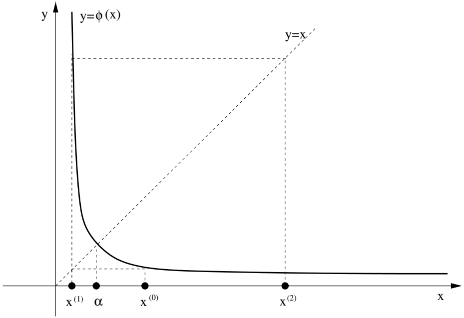




Cas **divergents** :

$$\phi'(\alpha) > 1, \qquad \phi'(\alpha) < -1.$$





Convergence de la méthode de point fixe

Théorème (Convergence globale)

Remarque

Si $\phi(x)$ est différentiable sur $[a, b]$ et

$$\exists K < 1 \text{ tel que } |\phi'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b],$$

alors la deuxième condition de la proposition (2) est satisfaite (mais pas nécessairement la première !). Cette hypothèse est plus forte, mais elle est plus souvent utilisée en pratique car elle est plus aisée à vérifier.

Ordre de convergence

Définition

Pour une suite de nombres réels $\{x^{(k)}\}$ qui converge, $x^{(k)} \to \alpha$, on dit que la convergence vers α est linéaire s'il existe une constante $C < 1$ telle que, pour k suffisamment grand,

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid .}$$

Ordre de convergence

Définition

Pour une suite de nombres réels $\{x^{(k)}\}$ qui converge, $x^{(k)} \to \alpha$, on dit que la convergence vers α est linéaire s'il existe une constante $C < 1$ telle que, pour k suffisamment grand,

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid .}$$

On dit que la convergence est quadratique, s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\boxed{\mid x^{(k+1)} - \alpha \mid \leq C \mid x^{(k)} - \alpha \mid^2 .}$$

Ordre de convergence

Définition

Pour une suite de nombres réels $\{x^{(k)}\}$ qui converge, $x^{(k)} \to \alpha$, on dit que la convergence vers α est linéaire s'il existe une constante $C < 1$ telle que, pour k suffisamment grand,

$$\boxed{| x^{(k+1)} - \alpha | \leq C | x^{(k)} - \alpha | .}$$

On dit que la convergence est quadratique, s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\boxed{| x^{(k+1)} - \alpha | \leq C | x^{(k)} - \alpha |^2 .}$$

En général, la convergence est d'ordre p, $p \geq 1$, s'il existe une constante $C > 0$ (avec $C < 1$ lorsque $p = 1$) telle que

$$| x^{(k+1)} - \alpha | \leq C | x^{(k)} - \alpha |^p .$$

Convergence locale

Théorème (Convergence locale)

Soient ϕ une fonction continue et différentiable sur $[a, b]$ et α un point fixe de ϕ. Si $|\ \phi'(\alpha)\ | < 1$, alors

- *il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x^{(0)} \in [a, b]$ avec $|\ x^{(0)} - \alpha\ | \leq \delta$, la suite $\{x^{(k)}\}$ définie par $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ converge vers α lorsque $k \to \infty$.*

De plus, on a

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha).}$$

Théorème

Soient ϕ une fonction deux fois différentiable sur $[a, b]$ et α un point fixe de ϕ. On considère $x^{(0)}$ dans l'ensemble de convergence locale. Si $\phi'(\alpha) = 0$ et $\phi''(\alpha) \neq 0$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction d'itération ϕ est d'ordre 2 et

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{\phi''(\alpha)}{2}.}$$

Démonstration.

A propos de la méthode de Newton I

A propos de la méthode de Newton II

Définition

On dit qu'un zéro α de f est de multiplicité m, $m \in \mathbb{N}$ si
$f(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad$ et $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
Un zéro de multiplicité $m = 1$ est appelé zéro simple.

Remarque

Si $f'(\alpha) = 0$, la convergence de la méthode de Newton est seulement linéaire, pas quadratique. On considère alors la méthode de Newton modifiée :

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots.} \tag{1}$$

avec m la multiplicité de α. Cette méthode est d'ordre 2.

Définition

On dit qu'un zéro α de f est de multiplicité m, $m \in \mathbb{N}$ si
$f(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et } f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.
Un zéro de multiplicité $m = 1$ est appelé zéro simple.

Remarque

Si $f'(\alpha) = 0$, la convergence de la méthode de Newton est seulement linéaire, pas quadratique. On considère alors la méthode de Newton modifiée :

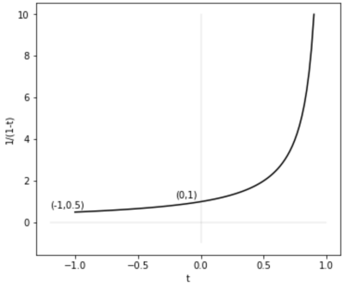
$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - m\frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots .} \tag{1}$$

avec m la multiplicité de α. Cette méthode est d'ordre 2.

Si la multiplicité m de α n'est pas connue, il y a d'autres méthodes, *des méthodes adaptatives*, qui permettent de récupérer l'ordre quadratique de la convergence.

Critères d'arrêt pour le point fixe I

Critères d'arrêt pour le point fixe II



Critères d'arrêt pour Newton