Analyse Numérique SV
Équations non linéaires

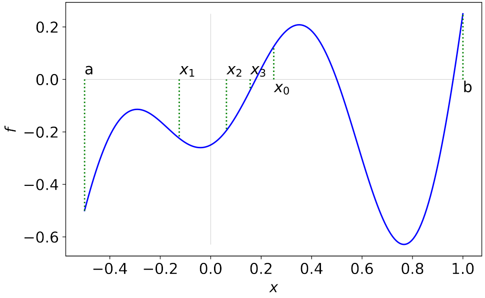
Simone Deparis
Ed Discussions
https://edstem.org/eu/courses/2057/discussion

EPFL Lausanne – MATH

Printemps 2025

Méthode de dichotomie ou bissection I

On pose $a^{(0)} = a$, $b^{(0)} = b$. Pour $k = 0, 1, \dots$



1. $x^{(k)} = \frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$
2. si $f(x^{(k)}) = 0$, alors $x^{(k)}$ est le zéro cherché. Autrement :
   1. soit $f(x^{(k)})f(a^{(k)}) < 0$, alors $\alpha \in [a^{(k)}, x^{(k)}]$.

      On pose $a^{(k+1)} = a^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = x^{(k)}$
   2. soit $f(x^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$, alors $\alpha \in [x^{(k)}, b^{(k)}]$.

      On pose $a^{(k+1)} = x^{(k)}$ et $b^{(k+1)} = b^{(k)}$

Bissection (dichotomie — Ex. 1a+b) I

Parmi les fonctions suivantes $[-5,5] \to \mathbb{R}$, lesquelles sont discontinues ?

- A $f(x) = (x-1)(x-2)$
- B $f(x) = x^2$
- C $f(x) = \frac{1}{x}$
- D $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$
- E $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$
- F $f(x) = |x| + 1$

Bissection (dichotomie — Ex. 1a+b) II

Parmi les fonctions suivantes $[-5, 5] \to \mathbb{R}$, lesquelles sont discontinues mais contiennent un zéro en $x = 2$?

- A $f(x) = (x-1)(x-2)$
- B $f(x) = x^2$
- C $f(x) = \frac{1}{x}$
- D $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$
- E $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$
- F $f(x) = |x| + 1$

Bissection (dichotomie — Ex. 1a+b) III

Parmi les fonctions suivantes $[-5,5] \to \mathbb{R}$, lesquelles sont strictement positives ?

- A $f(x) = (x-1)(x-2)$
- B $f(x) = x^2$
- C $f(x) = \frac{1}{x}$
- D $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$
- E $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$
- F $f(x) = |x| + 1$

Bissection (dichotomie — Ex. 1a+b) IV

Parmi les fonctions suivantes $[-5, 5] \to \mathbb{R}$, lesquelles ont au moins deux zéros ?

- A $f(x) = (x-1)(x-2)$
- B $f(x) = x^2$
- C $f(x) = \frac{1}{x}$
- D $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$
- E $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$
- F $f(x) = |x| + 1$

Bissection (dichotomie — Ex. 1a+b) V

Parmi les fonctions suivantes $[-5, 5] \to \mathbb{R}$, lesquelles changent de signe mais ne passent pas par zéro ?

- A $f(x) = (x-1)(x-2)$
- B $f(x) = x^2$
- C $f(x) = \frac{1}{x}$
- D $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$
- E $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$
- F $f(x) = |x| + 1$

Bissection (dichotomie — Ex. 1a+b) VI

Parmi les fonctions suivantes $[-5, 5] \to \mathbb{R}$, pour lesquelles peut-on espérer trouver un zéro avec la méthode de bissection ?

- A $f(x) = (x-1)(x-2)$
- B $f(x) = x^2$
- C $f(x) = \frac{1}{x}$
- D $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$
- E $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$
- F $f(x) = |x| + 1$

Bissection (dichotomie — Ex. 1c) I

Considérons la fonction $\sin(x)$ dans l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$. Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour trouver un zéro avec une tolérance de $\epsilon = 10^{-7}$. Choisir le plus petit nombre possible.

- A 7-8
- B 11-12
- C 15-16
- D 19-20
- E 23-24
- F 27-28

Bissection (dichotomie — Ex. 1e)

Si dans l'algorithme on divise l'intervalle en deux parties de tailles non égales, quel en sera l'effet ? Supposons que l'intervalle soit divisé en utilisant $1/3$ et $2/3$ de l'intervalle original, quelle est la borne théorique de l'erreur ?

La méthode de Newton I

Newton (Ex. 2)

Soit $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x - 5$. On observe que :

$$f(1) = -6 < 0 \quad \text{et} \quad f(3) = 16 > 0\ .$$

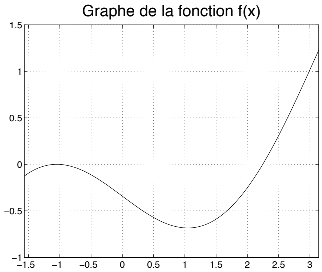
On a sûrement au moins un zéro $x^* \in [1,3]$.

1. Montrer l'unicité du zéro $x^* \in [1,3]$.
2. Écrire la méthode de Newton pour la fonction f.
3. En interprétant cette méthode comme une méthode de point fixe, montrer qu'elle est d'ordre 2. *(Cette partie sera à faire après avoir vu la section 1.4 des vidéos)*

Newton (Ex. 2) I

Newton (Ex. 3) I

On veut calculer les zéros de l'équation $f(x) = \frac{x}{2} - \sin(x) + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Le graphe de la fonction $f(x)$ est montré dans la figure suivante :



Newton (Ex. 3) II

1. Peut-on appliquer la méthode de bissection pour calculer les deux racines ? Pourquoi ? Dans le cas où c'est possible, estimer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour calculer le(s) zéro(s) avec une tolérance $tol = 10^{-10}$, après avoir choisi un intervalle convenable.
2. Écrire la méthode de Newton pour la fonction $f(x)$.
3. A l'aide du graphe de la fonction $f(x)$, déduire l'ordre de convergence de la méthode pour les deux zéros. *(Cette partie sera à faire après avoir vu la section 1.4 des vidéos)*

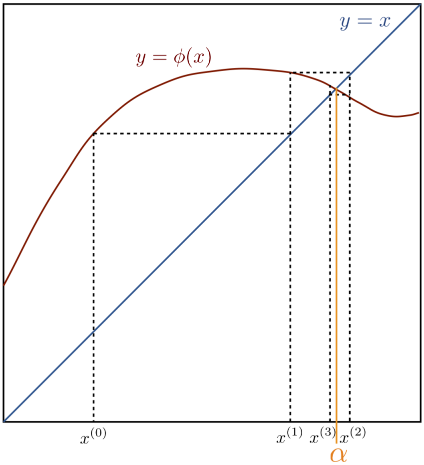
Newton (Ex. 3) I

Méthode de point fixe

Une racine α de f : $f(\alpha) = 0$ Un point fixe α de ϕ : $\phi(\alpha) = \alpha$

Idée : On va construire une suite $\boxed{x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}),\ k \geq 0.}$

Si $x^{(k)} \to \alpha$ et si ϕ est continue en α, alors la limite α satisfait $\phi(\alpha) = \alpha$.



Ici :
En partant du point $x^{(0)}$, la suite $\{x^{(k)}\}$ converge vers le point fixe α

Y a-t-il des critères ?

On considère toujours l'équation $f(x) = \sin(2x) - 1 + x = 0$.
On peut construire deux problèmes équivalents

$$x = \phi_1(x) = 1 - \sin(2x)$$
$$x = \phi_2(x) = \frac{1}{2}\arcsin(1-x), \qquad 0 \le x \le 1$$