

# GM – PROBABILITÉS ET STATISTIQUE – SÉRIE 6

---

## En salle

**Exercice 1** La densité conjointe de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par

$$f(x, y) = x + y, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \quad = 0 \text{ sinon.}$$

- (a) Vérifier que  $f(x, y)$  représente bien une fonction de densité.
- (b) Déterminer les densités marginales  $f_X(x)$  et  $f_Y(y)$ .
- (c)  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? Justifier.
- (d) Calculer  $E(X)$ ,  $Var(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $Var(Y)$ .

**Exercice 2** La densité conjointe de  $X$  et  $Y$  est  $f(x, y) = c(x^2 - y^2)e^{-x}$ ,  $0 \leq x < \infty$ ,  $-x \leq y \leq x$  ( $= 0$  sinon). Trouver la distribution conditionnelle (fonction de répartition conditionnelle)  $F_{Y|X=x}(y | x)$  de  $Y$ , étant donné que  $X = x$ .

**Exercice 3** Il a été évalué que chaque client de restaurant dans le canton dépense en moyenne 12 francs pour un dîner, avec un écart-type de 4 francs. Un restaurant pris au hasard a sélectionné un échantillon des additions de 49 clients.

- (a) Utiliser le théorème central limite (TCL) pour calculer la probabilité que la valeur moyenne des 49 additions soit plus élevée que 14 francs.
  - (b) Cent restaurants (indépendants) ont fait l'objet de la même étude. Ce qui veut dire que chaque restaurant a dû choisir les additions de 49 de ses clients et indiquer le montant moyen. Combien de restaurants devraient en principe signaler un montant moyen de 14 francs ou plus ?
- 

## À domicile

**Exercice 1** La densité conjointe des VAs  $X$ ,  $Y$  continues est

$$f(x, y) = \frac{x}{5} + cy, \quad 0 < x < 1, 1 < y < 5; \quad = 0 \text{ sinon.}$$

- (a) Trouver  $c$
- (b)  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ? Justifier.
- (c) Trouver  $P(X + Y > 3)$

**Exercice 2** La fonction de densité simultanée de  $X$  et  $Y$  est

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left( x^2 + \frac{xy}{2} \right), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2; \quad = 0 \text{ sinon.}$$

- (a) Vérifier que c'est bien là une fonction de densité conjointe
- (b) Déterminer la fonction de densité (marginale) de  $X$   
Trouver : (c)  $P(X > Y)$  (d)  $E[X]$  (e)  $E[Y]$

**Exercice 3** Supposons un échantillon aléatoire de 64 bonbons est sélectionné. La masse moyenne de ces bonbons ( $\bar{x}$ ) égale 90 grammes, et la valeur de l'écart-type  $s$  est de 10 grammes.

- (a) Donner un intervalle de confiance (approximatif) à 95% pour la masse moyenne  $\mu$  de la population des bonbons.
- (b) Poser vos suppositions.
- (c) Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour que la longueur de l'IC à 95% pour  $\mu$  soit inférieur à 1 ?
- (d) Recalculer l'intervalle pour un niveau de confiance plus élevé, soit 99%.
- (e) Vérifier que l'intervalle obtenu dans (d) est plus large que celui obtenu dans (a) ; expliquer ce fait.