GM – Probabilités et Statistique

http://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=18431

Cours 2

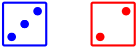
- Analyse combinatoire
- Introduction – théorie des probabilités

Analyse combinatoire

- Pour plusieurs situations, il est souhaitable de disposer d'une méthode efficace pour *dénombrer* les résultats possibles
- En fait, bien de problèmes en théorie des probabilités peuvent être résolus simplement *en comptant le nombre de manières différentes* selon lesquelles un certain *événement* peut se réaliser
- La théorie mathématique du dénombrement : **analyse combinatoire**

Principe fondamental de dénombrement (PFD)

- Supposons qu'il faille réaliser *deux* expériences
- Si *l'expérience 1* peut produire l'un quelconque de $\underline{m}$ résultats et si, *pour chacun d'entre eux*, il y a $\underline{n}$ résultats possibles pour l'expérience 2
- $\Rightarrow$ Alors, il existe $\boxed{m \times n}$ résultats pour les deux expériences *prises ensemble*.

Exemple 2.1 jets de 2 dés : 

Solution : Il existe ____ issues possibles pour le dé bleu

et ____ issues possibles pour le dé rouge et donc ________

pour les 2 expériences prises ensemble

Principe fondamental de dénombrement généralisé (PFDG)

- Si r expériences doivent être réalisées et sont telles que :
  - la première peut produire l'un quelconque de n_1 résultats,
  - si pour *chacun d'entre eux* il y a n_2 résultats possibles pour la deuxième expérience,
  - si pour *chaque résultat des deux premières expériences* il y a n_3 résultats possibles pour la troisième expérience,
  - et ainsi de suite . . .
- Il y aura alors *un total de* $\boxed{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r}$ résultats possibles pour les r expériences prises ensemble.

Exemples

Exemple 2.2a Combien de plaques portant un matricule de 7 caractères peut-on former si le premier caractère est un chiffre, puis 3 lettres, et les 3 derniers des chiffres ? ?

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

Exemple 2.2b Combien de plaques si l'on excluait que les lettres ou les chiffres se répètent ? ?

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

Permutations : arrangements ordonnés

- Un *arrangement ordonné* d'objets est appelé une **permutation**
- **Exemple :** Combien existe-t-il d'arrangements ordonnés des lettres a, b et c ?

1. *Énumération directe :* faire la liste de toutes les possibilités, puis compter
2. *Principe fondamental :*
   - la première lettre de la permutation peut être n'importe laquelle des 3,
   - la deuxième peut ensuite être choisie parmi les 2 restantes,
   - tandis que la troisième ne peut plus faire l'objet d'aucun choix (c.-à-d. 1 'choix')

- En utilisant le *principe fondamental généralisé*, on a que : le nombre de permutations de *n objets discernables* est $\boxed{n!}$ (n **factorielle** $= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$)

Exemple

Exemple 2.3a 8 matériaux seront classés en fonction de leur capacité à accomplir une tâche. En supposant que deux matériaux ne possèdent pas exactement la même capacité, combien de classements sont possibles ?

Exemple 2.3b 3 échantillons d'un des matériaux sont choisis parmi un groupe de 9 échantillons, puis sont placés dans 3 machines (M_1, M_2, M_3) afin de tester leur résistance á l'eau. De combien de façons peut cette affectation être fait ?

Permutations : objets partiellement indiscernables

Exemple 2.4 Combien *d'arrangements différents* peut-on former avec les letters $E\ R\ R\ E\ U\ R$?

Solution

- D'abord, comptons le nombre de permutations quand les 3 R

  et les 2 E *sont distincts* $(E_1R_1R_2E_2UR_3) =$ ________
- Cependant, considérons l'une quelconque des permutations, p. ex. $E_1R_1E_2R_2UR_3$. Si nous permutions les R entre eux et les E entre eux, l'arrangement résultant serait toujours de la même forme, soit : $ERERUR$
  - Il existe combien de permutations des R et des E : ______
  - Donc, combien de permutations (le total) : $=$ __________
- Le nombre de permutations de n objets, *parmi lesquels* n_1 *sont indiscernables* entre eux, n_2 *sont indiscernables* entre eux,

  $\ldots$, n_r *sont indiscernables* entre eux : $\boxed{\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}}$

Combinaisons : séléction sans ordre

- Ensuite, déterminons le nombre de groups de r objets qu'il est possible de former sans répétition à partir d'un total de n objets (quand *l'ordre des objets n'est pas significatif*)

Exemple 2.5 Combien de groupes de 3 batons peut-on construire en tirant parmi 5 souris (A, B, C, D, E) ?

Solution On utilise le raisonnement suivant :

Puisqu'il y a ____ façons de choisir le premier batons, puis ____ de choisir ensuite le deuxième et finalement ____ de choisir le dernier, il y a donc __________ *en tenant compte de l'ordre dans lequel ces batons sont choisis*.

Cependant, un triplé donné, p. ex. le triplé constitué des batons A, B, D, apparaîtra __________ fois.

Donc, le nombre total de groupes pouvant être formés est ____

Coefficients binomiaux

- L'expression $\binom{n}{r}$ (*r parmi n*) pour $r \leq n$, est définie par :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Ce nombre s'appelle également le *coefficient binomial*
- Tout sous-ensemble de r objets choisis sans répétition dans un ensemble en contenant n est appelé **combinaison de r objets pris parmi n**
- Le nombre $\binom{n}{r}$ est le nombre de combinaisons de r objets pris parmi n si **l'ordre des objets est sans importance**

Exemples

Exemple 2.6 On veut former un comité comprenant 3 des 20 personnes d'un groupe. Combien y a-t-il de ces comités ??

Exemple 2.7a A partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes, combien de comités différents composés de 2 femmes et de 3 hommes peut-on former ??

Exemple 2.7b

Exemple 2.7b Qu'en est-il si 2 des hommes s'entendent mal et refusent de siéger simultanément au comité *??*

Coefficients multinomiaux

- En utilisant *le principe fondamental généralisé*, on déduit que le nombre de répartitions possibles de n objets en r groupes distincts de tailles respectives $n_1, n_2, \ldots, n_r$ est :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\; n_2!\; \cdots\; n_r!}.$$

- Ce nombre est appelé le **coefficient multinomial**

$\boxed{\textbf{Exemple 2.8}}$ Dans une étude comparative, 16 blocs de ciment doivent être affectées en 3 groupes de 12, 2 et 2 blocs.

De combien de façons peut-il être fait *? ?*

PAUSE

Ensemble fondamental

- Considérons une 'expérience' dont l'issue n'est pas prévisible – p. ex., je lance un dé équilibré
- Bien que *l'issue de l'expérience* ne soit pas connue d'avance, admettons que *l'ensemble des issues possibles* est connu
- Cet ensemble des issues possibles de l'expérience est appelé **l'ensemble fondamental** de l'expérience, noté S (ou Ω dans quelques livres)
- L'ensemble fondamental pourrait être *discret* ou *continu*
- *Exemples :*
    - On lance 2 dés : ______________________
    - On lance 2 dés en considérant *la somme* : __________
    - On considère la durée de temps d'éclairage d'une

      ampoule : ______________________

Événements

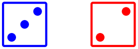
- Tout sous-ensemble $E \subset S$ est appelé un **événement**
- p. ex. :  est un événement de l'ensemble fondamental S de l'issue de lancement de 2 dés
- Pour toute paire d'événements E et F, le nouvel événement $E \cup F$ (**l'union** de E et F) contient chaque élément se trouvant *dans E, dans F* **OU** *dans les deux à la fois*
- De même pour toute paire d'événements E et F, le nouvel événement $E \cap F$ (**l'intersection** de E et F) est défini comme l'ensemble des réalisations qui sont *à la fois dans E* **ET** *dans F*
  - Si $E \cap F = \varnothing$ (**l'événement vide**), alors E et F sont dits **mutuellement exclusifs (ME)**
- Le nouvel événement E^c, le **complément** de E, contient tous les éléments de S *qui* **ne sont pas** *dans E*

Diagramme de Venn – Union, Intersection

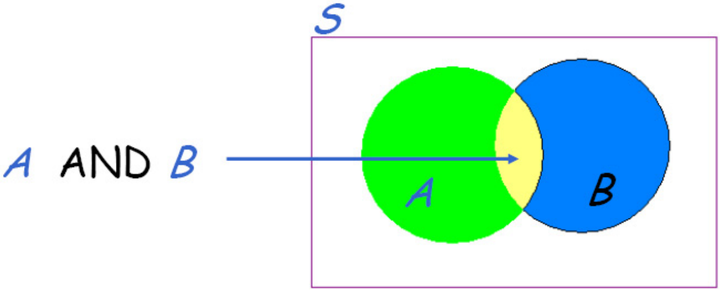
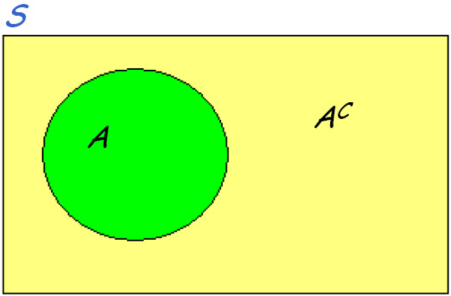


Diagramme de Venn – Complément



Règles utiles – ‘l’algèbre’ d’événements

(ne fait pas partie de l’examen)

- Commutativité :
  - $E \cup F = F \cup E$
  - $E \cap F = F \cap E$
- Associativité :
  - $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$
  - $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$
- Distributivité :
  - $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$
  - $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$
- Lois de DeMorgan :
  - $(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$
  - $(\bigcap_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$

Théorie fréquenciste des probabilités

- Il existe plusieurs définitions de la *probabilité d'un événement*
- Nous utilisons celle de la *théorie fréquenciste des probabilités*
- On suppose qu'une expérience ayant ensemble fondamental S est exécutée plusieurs fois sous les mêmes conditions
- Pour chaque événement E de S, on définit $n(E)$ comme **le nombre de fois où l'événement E survient** lors des n premières répétitions de l'expérience
- Alors $P(E)$, *la probabilité de l'événement E* est définie par

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

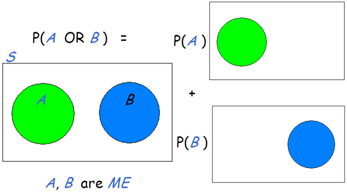
- La probabilité est donc la **fréquence limite** de l'occurrence de l'événement E

Axiomes de probabilité

Pour chaque événement E de S, nous admettons qu'un nombre $P(E)$ (appelé **la probabilité de l'événement** E) existe et satisfait aux trois *axiomes de probabilité* suivants :

Axiomes de probabilité

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Pour chaque séquence d'événements mutuellement exclusifs $E_1, E_2, \ldots,$ $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$.



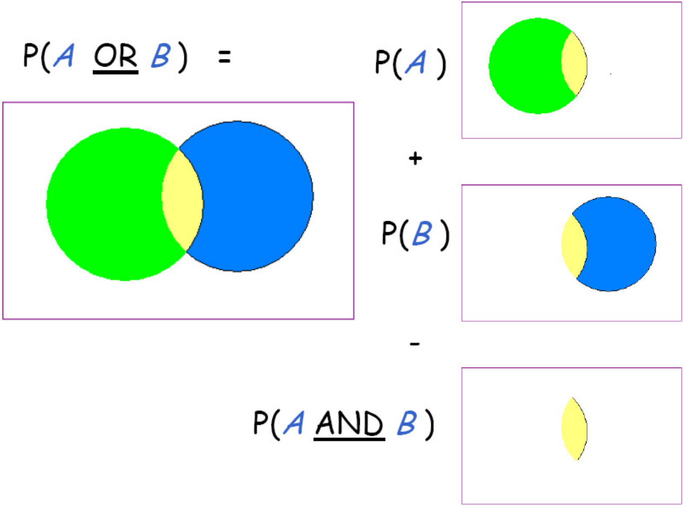
Quelques théorèmes élémentaires (mais utiles)

1. $P(E^c) = 1 - P(E)$
2. Si $E \subset F$, alors $P(E) \leq P(F)$
3. $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Théorème 'inclusion-exclusion' (général) :
(ne fait pas partie de l'examen)

$$
\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} \cap E_{i_2}) \\
& + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}) - \cdots \\
& + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_r}) \\
& + \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)
\end{aligned}
$$

Diagramme de Venn – Théorème ‘inclusion-exclusion’



Événements élémentaires équiprobables

- Le cas le plus simple : quand il y a *un nombre fini d'éléments élémentaire* de l'ensemble fondamental à *la même probabilité* d'apparaître (**équiprobable**)
- En appliquant l'axiome 3, on a que pour tout événement E :

$$P(E) = \frac{\text{nombre de points dans } E}{\text{nombre de points dans } S}$$

Exemple 2.9 Si deux dés sont lancés (et en supposant que les 36 issues possibles sont *équiprobables*), quelle est la probabilité que la somme des faces soit 8 ?

Solution Les issues corréspondant à l'événement somme $= 8$

sont ____

donc la probabilité *(inconditionnelle)* de l'événement $=$ __________

Ensemble fondamental (bleu, rouge)

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Exemple 2.9, cont.

Maintenant je donne l'information : le premier dé est 

$\Rightarrow$ *Sachant* cette information, P(somme = 8) = *? ?*

Solution Le calcul pour la probabilité quand les issues sont *équiprobables* :

$$P(E) = \frac{\text{nombre de points dans } E}{\text{nombre de points dans } S}$$

$\Rightarrow$Maintenant, combien d'issues dans l'ensemble fondamental S *? ?*

Sachant que le premier dé est  :

- *l'ensemble fondamental est changé*
- Maintenant, on considére *seulement les issues* dont le premier dé est  :

Ensemble fondamental

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Exemple 2.9, cont

- Il y a ____________ issues dans ce nouvel ensemble fondamental
- **PARMI ces issues**, combien corréspondent à l'événement : $\{\text{somme} = 8\}$ *??*

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \mathbf{(3,5)} & (3,6) \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6)
\end{array}$$

- Donc, la probabilité que la somme égale 8, SACHANT que le premier (bleu) était 3 est : ____________