

À noter : les raisonnements/justifications des étapes de résolution sont également importantes (pas seulement le résultat final).

En salle

Exercice 1 (a)
$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 (x+y) dx dy = \int_{x=0}^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^1 dx = \int_{x=0}^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (0+0) = 1, \text{ donc } f \text{ est bien une densité.}$$

(b)
$$f_X(x) = \int_{y=0}^1 (x+y) dy = \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^1 \Rightarrow f_X(x) = x + \frac{1}{2}, 0 \leq x \leq 1 (= 0 \text{ sinon})$$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^1 (x+y) dx = \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_{x=0}^1 \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{2} + y, 0 \leq y \leq 1 (= 0 \text{ sinon})$$

(c) $f_X(x) \cdot f_Y(y) = xy + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4} \neq f_{X,Y}(x,y)$, donc X et Y NE SONT PAS indépendantes.

(d)
$$E[X] = \int_{x=0}^1 x f_X(x) dx = \int_{x=0}^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_{x=0}^1 \Rightarrow E[X] = \frac{7}{12}$$

$$E[X^2] = \int_{x=0}^1 x^2 f_X(x) dx = \int_{x=0}^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{x=0}^1 = \frac{5}{12}$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} \Rightarrow Var(X) = \frac{11}{144}$$

En raison de symétrie, $E[Y] = E[X]$ et $Var(Y) = Var(X)$

Exercice 2
$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{c(x^2 - y^2)e^{-x}}{\int_{y=-x}^x c(x^2 - y^2)e^{-x} dy} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^3} \text{ si } -x \leq y \leq x;$$
$$f_{Y|X}(y | x) = 0 \text{ sinon.}$$

$$\Rightarrow F_{Y|X}(y | x) = \int f_{Y|X}(y | x) dy = \int_{-x}^y \frac{3}{4} \frac{x^2 - y^2}{x^3} dy = \frac{3}{4x^3} \int_{-x}^y (x^2 - y^2) dy$$

$$= \frac{3}{4x^3} [x^2 y - y^3/3] \Big|_{y=-x}^y = \frac{3}{4x^3} (x^2 y - y^3/3 + 2x^3/3) = \frac{1/2 + 3y/(4x) - y^3/(4x^3)}{1}$$

Exercice 3 (a) 1. Soit $\bar{X}$ = la moyenne des 49 additions

2. (TCL/CLT) $\bar{X} \sim N(\mu = 12, \sigma = 4/\sqrt{49})$

$$3,4. P(\bar{X} \geq 14) = P\left(\frac{\bar{X} - 12}{4/7} \geq \frac{14 - 12}{4/7}\right) \approx P(Z \geq 3.5) < (1 - 0.9998) \approx 0.0002$$

(b) 1. Soit X = le nombre de restaurants dont la moyenne > 14

2. $X \sim \text{Bin}(n = 100, p = 0.0002)$

3,4. $E[X] = np = 100(0.0002) = 0.02$; donc, 0 restaurants.

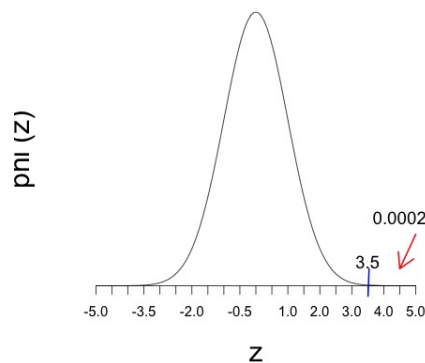


FIGURE 1 – ex. 3

À domicile

Exercice 1 (a) $\int_{x=0}^1 \int_{y=1}^5 (x/5 + cy) dy dx = \int_{x=0}^1 (4x/5 + 12c) dx = 12c + 2/5 = 1 \implies$

$$c = \frac{1}{20}$$

(b) Non, car la densité conjointe $f(x, y) = x(1/5 + y/(20x)) = g(x)k(x, y)$. ne se factorise pas en deux fonctions $g(x)h(x)$

$$(c) P(X + Y > 3) = \int_{x=0}^1 \int_{y=3-x}^5 (x/5 + y/20) dy dx$$

$$= \int_{x=0}^1 [(2+x)x/5 + 25/40 - (3-x)^2/40] dx = 1/5 + 1/15 + 5/8 - 19/120 = \frac{11}{15}$$

Exercice 2 (a) $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^2 \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dy dx = \frac{6}{7} \int_{x=0}^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{4}\right) \Big|_{y=0}^2 dx$

$$= \frac{6}{7} \int_{x=0}^1 (2x^2 + x) dx = \frac{6}{7} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{x=0}^1 = \frac{6}{7} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = 1 \implies \underline{f \text{ est bien une fonction de densité}}$$

(b) $f_X(x) = \int_{y=0}^2 \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) dy = \frac{6}{7} (2x^2 + x), 0 < x < 1$

$$(c) \quad P(X > Y) = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dy dx = \frac{6}{7} \int_{x=0}^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{4} \right) \Big|_{y=0}^x dx$$

$$= \frac{6}{7} \int_{x=0}^1 \frac{5}{4} x^3 dx = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^1 = \boxed{\frac{15}{56}}$$

$$(d) \quad E[X] = \int_{x=0}^1 x f_X(x) dx = \frac{6}{7} \int_{x=0}^1 x(2x^2 + x) dx = \frac{6}{7} \left(\frac{2x^3}{4} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^1 = \frac{6}{7} \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$\boxed{\frac{5}{7}}$$

$$(e) \quad E[Y] = \int_{y=0}^2 y f_Y(y) dy \quad \text{[définition];}$$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^1 \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dx = \frac{6}{7} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{2} \right) \Big|_{x=0}^1 = \frac{6}{7} \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{4} \right), \quad 0 < y < 2,$$

$$\Rightarrow E[Y] = \frac{6}{7} \int_{y=0}^2 y \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{4} \right) dy = \left(\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{12} \right) \Big|_{y=0}^2 = \frac{6}{7} \left(\frac{4}{6} + \frac{8}{12} \right) = \boxed{\frac{8}{7}}$$

Exercice 3 Intervalle de confiance pour la moyenne de la population $\mu : \bar{x} \pm z \times s/\sqrt{n}$

(a) Pour un IC de 95%, $z = 1.96$ (c'est autorisé à utiliser la valeur $z = 2$ au lieu de 1.96).

$$\bar{x} \pm 1.96 \times s/\sqrt{n} \Rightarrow \boxed{90 \pm 1.96 \times 10/\sqrt{64} \text{ grammes}} \quad \text{ou} \quad \boxed{90 \pm 2 \times 10/\sqrt{64} \text{ grammes}}$$

(également $90 \pm 1.96 \times 1.25$, ou 90 ± 2.45 , ou $(87.55, 92.45)$ grammes)

(b) Le paramètre ($\mu =$ poids moyenne) de la population est inconnu ; échantillon aléatoire (indépendant ou EAS) ; TCL s'applique

(c) [Afin de simplifier les calculs, on prend $z = 2$]

$$\text{Longueur d'un IC à 95\% : } \bar{x} + 2 \times s/\sqrt{n} - (\bar{x} - 2 \times s/\sqrt{n}) = \frac{4 \times s/\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \text{Trouver } n \text{ tel que } 4 \times 10/\sqrt{n} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 4 \times 10/1 \Rightarrow n \geq (40)^2 \Rightarrow \boxed{n \geq 1600}$$

[Remarquons que la longueur de l'IC partie (a) $= 4 \times 10/\sqrt{64} = 5$, et que 1 est 5 fois plus petit. Donc afin d'avoir une longueur 5 fois plus petite, il faut un échantillon de taille 5^2 fois de plus ; $5^2 = 25 \Rightarrow 25 \times 64 = 1600$.]

(d) Ici, on utilise $z = 2.58$, donc $(86.775, 93.225)$

(e) Longueur (a) $= 92.45 - 87.55 = 4.9$; longueur (d) $= 93.225 - 86.775 = 6.45$.

Il faut un intervalle plus longue si on veut avoir plus de confiance.