GM – Probabilités et Statistique – Corrigés 4

À noter : les **raisonnements/justifications** des étapes de résolution sont également importantes (pas seulement le résultat final).

En salle

Exercice 1 (a) $\dfrac{X-b}{a-b} = 1$ avec la probabilité p ou 0 avec la probabilité $1-p$, donc X est une variable aléatoire de Bernoulli(p).

(b) La variance d'une VA de Bernoulli(p) $= p(1-p) = Var\left(\dfrac{X-b}{a-b}\right)$ [substitution]

$= \dfrac{1}{(a-b)^2} Var(X-b)$ [$Var(cY) = c^2 Var(Y)$]

$= \dfrac{1}{(a-b)^2} Var(X)$ [$Var(Y+c) = Var(Y)$]

$\implies$ donc $Var(X) = (a-b)^2 p(1-p)$.

Exercice 2 1. Soit $\underline{\mathbf{X}}$ le nombre d'erreurs typographiques sur la page du magazine

2. $\underline{\mathbf{X}} \sim Pois(\lambda = 0.2)$ [l'espérance du nombre d'erreurs = 0.2 selon l'énoncé]

3, 4. $P(\underline{\mathbf{X}} = 0) = \boxed{e^{-0.2}}$ (≈ 0.82) [loi de Poisson, substitution]

(b) 3, 4. $P(\underline{\mathbf{X}} \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-0.2} - 0.2e^{-0.2}$

$= \boxed{1 - 1.2e^{-0.2}}$ (≈ 0.018) [loi de Poisson, substitution]

Exercice 3 Soit E l'événement que le remède ait un effet ; $P(E) = 0.75$, $P(E^c) = 0.25$.

1. Soit $\underline{\mathbf{X}}$ le nombre de rhumes attrapés

2. $X \sim Pois(\lambda)$, où λ dépende de l'efficacité du remède : s'il est efficace, $\lambda = 3$; sinon, $\lambda = 5$

3. Probabilité que le remède ait un effet : $P(E \mid X = 2)$

4. Grace à la formule de Bayes, $P(E \mid X=2) = \dfrac{P(X=2 \mid E)P(E)}{P(X=2 \mid E)P(E) + P(X=2 \mid E^c)P(E^c)}$

$P(X=2 \mid E) = P(X=2 \mid \lambda=3) = e^{-3}\, 3^2/2! \approx 0.2240$ [loi Poissonienne]

$P(X=2 \mid E^c) = P(X=2 \mid \lambda=5) = e^{-5}\, 5^2/2! \approx 0.0842$ [loi Poissonienne]

$\Rightarrow P(E \mid X=2) = \dfrac{0.2240 \times 0.75}{0.2240 \times 0.75 + 0.0842 \times 0.25} \approx \underline{\underline{0.89}}$ [formule de Bayes, subst.]

À domicile

Exercice 1 $E[X] = np = 6$; $Var(X) = np(1-p) = 2.4$.
Alors $6(1-p) = 2.4 \implies (1-p) = 0.4$, donc $p = 0.6$; $np = 6 \implies 0.6n = 6 \implies n = 10$.

Alors, $\boxed{P(X=5) = \binom{10}{5}(0.6)^5(0.4)^5}$.

Exercice 2 1. Soit $\underline{\mathbf{X}}$ le nombre d'erreurs typographiques sur la page du magazine

2. $\underline{\mathbf{X}} \sim \ Pois(\lambda = 0.2)$ [l'espérance du nombre d'erreurs = 0.2 selon l'énoncé]

3, 4. $P(\underline{\mathbf{X}} \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-0.2} - 0.2e^{-0.2}$

$= \boxed{1 - 1.2e^{-0.2}} \quad (\approx 0.018)$ [loi de Poisson, substitution]