GM – Probabilités et Statistique – Corrigés 2

À noter : les **raisonnements/justifications** des étapes de résolution sont également importantes (pas seulement le résultat final). **En salle**

Exercice 1 (a) Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a 3 (pâtes) $\cdot$ 2 (choix de fromage) $\cdot$ 5 (choix de garniture) $=$ 30 pizzas possibles.

(b) Il y a $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1} = 10$ combinaisons de 2 garnitures pour la pizza pour chaque combinaison de pâte et fromage, donc par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $3\cdot2\cdot\binom{5}{2} = 3\cdot2\cdot10 =$ 60 pizzas possibles.

Exercice 2 (a) Sans restriction, il y a 10 choix possibles pour le président. Pour chacun il y a 9 choix possibles pour le trésorier, et pour chaque combinaison il y a 8 choix possibles pour le secrétaire. Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a donc $10\cdot9\cdot8 =$ 720 choix possibles.

(b) Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $8\cdot7\cdot6 = 336$ choix sans A ni B, et il y a $3\cdot8\cdot7 = 168$ choix où A (mais pas B) a une charge (car il y a 3 choix pour l'office d'A pour chaque combinaison (dont il y a $8\cdot7$) de deux autres personnes pour les autres offices). Similairement, il y a $3\cdot8\cdot7 = 168$ choix où B (mais pas A) a une charge. Donc, il y a $336 + 2\cdot168 =$ 672 choix possibles.

[On pourrait aussi compter le nombre avec les deux A et B et soustraire de 720, le nombre total de choix possibles. Il y a 3 choix pour A, puis 2 choix pour B, enfin 8 choix pour l'officier qui reste. Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $3\cdot2\cdot8 = 48$ comités avec les 2, donc 720 - 48 = 672 choix possibles.]

(c) De la même manière de (b), par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, le nombre de choix avec C et D est $3\cdot2\cdot8 = 48$: 3 offices possibles pour C, et pour chaque choix d'office pour C il reste 2 choix d'office pour D ; il reste 8 personnes possibles pour la dernière charge. Le nombre sans C ni D est $8\cdot7\cdot6 = 336$ (Principe fondamental de dénombrement généralisé). Donc le total est $48 + 336 =$ 384 choix possibles.

(d) Il y a 3 choix pour E, et pour chacun il y a $9\cdot8$ choix pour les deux autres officiers. Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $3\cdot9\cdot8 =$ 216 choix possibles.

(e) Ceci est le total du nombre de comités sans F et le nombre de comités dont F est président. Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, le nombre de comités sans F est $9\cdot8\cdot7 = 504$. Le nombre où F est le président est $1\cdot9\cdot8 = 72$, donc $504 + 72 =$ 576 comités possibles.

Exercice 3 (a) Tous les $\binom{10}{5}$ examens possibles sont équiprobables, dont $\binom{7}{5}$ que l'étudiant sait résoudre ; donc, la probabilité est $\binom{7}{5}/\binom{10}{5} = \underline{\frac{1}{12}}$.

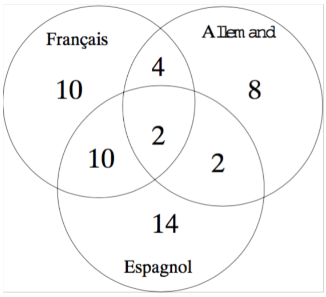
(b) En application du Principe fondamental de dénombrement généralisé, le nombre d'examens dont l'étudiant sait résoudre 4 sur 5 questions (et ne sait pas pour 1) est $\binom{7}{4}\binom{3}{1}$, donc la probabilité que l'étudiant sait résoudre 4 questions est $\binom{7}{4}\binom{3}{1}/\binom{10}{5} = \frac{5}{12}$.

La probabilité qu'il sait résoudre au moins 4 est la somme des probabilités qu'il sait résoudre 4 et qu'il sait résoudre 5 (ces deux événements sont disjoints/ mutuellement exclusifs), donc $\frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \underline{\frac{1}{2}}$.

À domicile

Exercice 1 Par le Principe fondamental de dénombrement généralisé, il y a $5 \cdot 2 \cdot 4 = \underline{40}$ répliques de l'expérience.

Exercice 2



Evénement A : "suit le cours d'allemand".
Evénement F : "suit le cours de français".
Evénement E : "suit le cours d'espagnol".

$$P(E) = \frac{28}{100} \qquad P(A) = \frac{16}{100} \qquad P(F) = \frac{26}{100}$$
$$P(E \cap F) = \frac{12}{100} \qquad P(E \cap A) = \frac{4}{100} \qquad P(F \cap A) = \frac{6}{100}$$
$$P(E \cap A \cap F) = \frac{2}{100}$$

(a) On a
$$\begin{aligned} P(\bar{E} \cap \bar{A} \cap \bar{F}) &= 1 - P(E \cup A \cup F) && \text{[deMorgan, complément]} \\ &= 1 - [P(E) + P(A) + P(F) && \text{[inclusion-exclusion]} \\ &-P(E \cap A) - P(E \cap F) - P(F \cap A) + P(E \cap A \cap F)] \\ &= 1 - \left[\frac{28}{100} + \frac{16}{100} + \frac{26}{100} - \frac{4}{100} - \frac{12}{100} - \frac{6}{100} + \frac{2}{100}\right] = \frac{50}{100} = \underline{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(b) D'abord, notons que pour événements G et H, l'événement $G \cap \bar{H} = G \backslash (G \cap H)$ $(*)$ (c'est-à-dire, la partie de G qui n'est pas contenu en $G \cap H$). Vous pouvez faire un diagramme de Venn pour une visualisation de ce fait. Alors, de la même manière qu'on a fait pour la partie (a), on a :

$$\begin{aligned} & P(E \cap \bar{A} \cap \bar{F}) + P(\bar{E} \cap A \cap \bar{F}) + P(\bar{E} \cap \bar{A} \cap F) \\ &= P(E \cap (\overline{A \cup F})) + P(A \cap (\overline{E \cup F})) + P(F \cap (\overline{A \cup E})) && \text{[associativité, deMorgan]} \\ &= [P(E) - \underline{P(E \cap (A \cup F))}] + [P(A) - \underline{P(A \cap (E \cup F))}] + [P(F) - \underline{P(F \cap (A \cup E))}]. && [*] \end{aligned}$$

Maintenant, calculons (p. ex.) $\underline{P(E \cap (A \cup F))}$:

$$\underline{P(E\cap(A\cup F))} = P(E) + \boxed{P(A\cup F)} - \underline{\underline{P(E\cup A\cup F)}} \qquad \text{[inclusion-exclusion]}$$

$$\boxed{P(A\cup F)} = P(A) + P(F) - P(A\cap F) \qquad \text{[inclusion-exclusion]}$$

$$\underline{P(E\cup A\cup F)} = P(E) + P(A) + P(F) \qquad \text{[inclusion-exclusion]}$$
$$-P(E\cap A) - P(E\cap F) - P(A\cap F) + P(E\cap F\cap A)$$

$$\Longrightarrow \underline{P(E\cap(A\cup F))} = P(E) + P(A) + P(F) - P(A\cap F) \qquad \text{[substitution]}$$
$$-[P(E) + P(A) + P(F) - P(E\cap A) - P(E\cap F) - P(A\cap F) + P(E\cap F\cap A)]$$
$$= P(E\cap A) + P(E\cap F) - P(E\cap F\cap A) \quad \text{[et de manière similaire pour les autre termes}$$

Et donc [*] $= [P(E) - \boxed{P(E\cap A)} - \boxed{P(E\cap F)} + \underline{\underline{P(E\cap A\cap F)}}]$

$[P(A) - \boxed{P(A\cap E)} - \boxed{P(A\cap F)} + \underline{\underline{P(E\cap A\cap F)}}]$

$[P(F) - \boxed{P(F\cap A)} - \boxed{P(F\cap E)} + \underline{\underline{P(E\cap A\cap F)}}]$

$$= P(E) + P(A) + P(F) - 2\,\boxed{P(A\cap F)} - 2\,\boxed{P(A\cap E)} - 2\,\boxed{P(F\cap E)} + 3\,\underline{\underline{P(E\cap A\cap F)}}$$

$$= \frac{28}{100} + \frac{16}{100} + \frac{26}{100} - 2\times\frac{6}{100} - 2\times\frac{4}{100} - 2\times\frac{12}{100} + 3\times\frac{2}{100} = \underline{\frac{32}{100}}$$

(c) Notons X_i, l'événement "l'élève i suit au moins un cours" $(i = 1, 2)$; alors,

$$P(X_1\cup X_2) = P(X_1) + P(X_2) - P(X_1\cap X_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{50}{100}\times\frac{49}{99} = 1 - \frac{49}{198} = \underline{\frac{149}{198}}$$