
11



$$\textcircled{1.53} \quad b_{r,6^2}(a\delta_n^2)$$

$$= \delta^2 \left(a \left(\frac{n-1}{n} \right) - 1 \right)$$

$$\text{Var}_{r,6^2}(a\delta_n^2) = \text{Var}\left(\frac{an\delta_n^2}{n}\right)$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \text{Var}(n\delta_n^2) = \frac{a^2}{n^2} 2\delta^4(n-1)$$

$$\begin{aligned} \text{EQM}_{r,6^2}(a\delta_n^2) &= \frac{a^2}{n^2} 2\delta^4(n-1) \\ &\quad + \delta^4 \left(a \frac{n-1}{n} - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

Il faut minimiser par rapport à a

$$\frac{\partial}{\partial a} = 6^{\frac{n}{2}} \frac{2(n-1)}{n^2} a$$

$$+ 6^{\frac{n}{2}} 2 \left(a^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) \frac{n-1}{n}.$$

$$\frac{\partial}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{n}{n+1}}$$

(algèbre)

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 a} > 0 \Rightarrow \text{minimum}$$

Le meilleur estimateur est

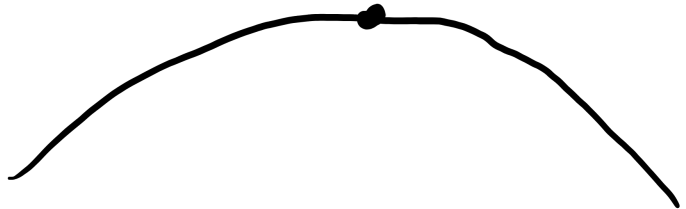
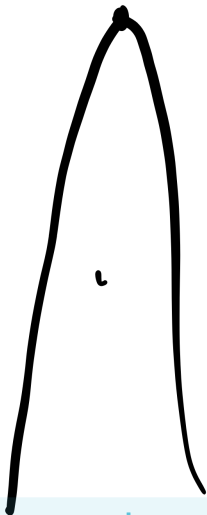
$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$$

pour minimiser le biais $\rightarrow a = \frac{n}{n-1}$
 pour minimiser la var $\rightarrow a = 0$

(166) méthode delta

avec $g = (f')^{-1}$

" $J_n = \frac{1}{f_n}$ "



$$(167) \quad \ell(\lambda) = n \log \lambda - \lambda n \bar{X}_n$$

$$\ell'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - n \bar{X}_n$$

$$\ell''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$I_n = -E_{\lambda} \left[-\frac{n}{\lambda^2} \right] = \frac{n}{\lambda^2}$$

rien d'aléatoire

$$\hat{\lambda}_{ML} \overset{\text{app}}{\sim} \mathcal{N}\left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n}\right)$$

$$(\text{on a vu } \hat{\lambda}_{ML} = \frac{1}{\bar{X}_n})$$

$$J_n = -\mathcal{L}''(\hat{\mu}_n) = \frac{n}{\hat{\sigma}_n^2} \\ = n \overline{X}_n^2$$

(171) $\Pr\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z_n \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$= 1 - \alpha$, où z_β est tel
que $\Pr(Z_n \leq z_\beta) = \beta$.

(comme la loi de Z_n
ne dépend pas de μ ,

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \quad P_{\mu} \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z_n \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$= 1 - \alpha$$

Donc

$$1 - \alpha = P_{\mu} \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\bar{X}_n - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$= P_{\mu} \left(-\bar{X}_n + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq -\bar{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= P_{\mu} \left(\bar{Y}_n - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{Y}_n - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right)$$

Par symétrie $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

(173)

$$\left[\bar{Y}_n \pm \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right] \quad \alpha = 0,05$$

$$= \left[5,34 \pm \frac{z_{0,975}}{\sqrt{57=8}} 0,12 \right]$$

$$\approx \left[5,34 \pm \frac{1,96}{8} 0,12 \right]$$

$$\approx [5.37, 5.37]$$

$$(175) \alpha = 0.05$$

$$t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{8, 0.975}$$

$$= 2.306$$

$$\left[\bar{Y}_n \pm \frac{2.306}{\sqrt{n}} s_n \right]$$

$$= \left[\checkmark 90 \pm \frac{2.306}{3} 16 \right]$$

$$= [1027.8, 1052.2]$$

$$\textcircled{180} \quad P_{\theta}(T_n \leq t) = P_{\theta}(M_n \leq t\theta) \\ \text{ex 12.1} \quad \left(\frac{t\theta}{\theta}\right)^n = t^n \quad \forall t \in [0, 1]$$

ne dépend pas de θ . Donc
c'est un pivot. L'IC correspondant
est $[M_n, \alpha^{-1/n} M_n]$

$$\textcircled{182} \quad L(\lambda) = e^{-n\lambda} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{Y_i}}{Y_i!}$$

(algèbre) : $\hat{\lambda}_{ML} = \bar{Y}_n$

$$L''(\lambda) = -\frac{n\bar{Y}_n}{\lambda^2} \quad J_n(\hat{\lambda}_{ML}) = \frac{n}{\bar{Y}_n}$$

I ($\left[\bar{Y}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{Y}_n}{n}} \right]$)
 approximates $z_{0.95} \approx 1.64$ (table)

(183) $E[Y_i] = \frac{\theta}{2}$
 $\text{Var}_\theta[Y_i] = \frac{\theta^2}{12}$ (algebra)

$\sqrt{n} \frac{\bar{Y}_n - \frac{\theta}{2}}{\sqrt{\theta^2/12}} \underset{T_n}{\sim} N(0,1)$
 (TCL)

Donc

$1-\alpha \approx P_\theta \left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq T_n \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$

$$= \Pr_{\theta} \left(\frac{-\bar{Z}_n - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \leq \frac{\bar{Y}_n}{\theta} \right. \\
\left. (\text{elgebre}) \leq \frac{\bar{Z}_n - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \right) \\
= \Pr_{\theta} \left(\frac{\bar{Y}_n}{\left(\frac{\bar{Z}_n - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \right)} \leq \theta \leq \frac{\bar{Y}_n}{\left(\frac{-\bar{Z}_n - \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \right)} \right)$$

On obtient un $\mathbb{I}$ approximatif, dont la longueur est $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ alors que pour $[\mu_n, \mu_n e^{i\pi}]$

la longueur est $O(\frac{1}{\epsilon})$
bcp plus court.

(186) $Z_i = \text{diff}$

$$= (-2, 6, 6, 5, -1, \dots)$$

$$\bar{Z}_n \approx 3,570$$

$Z_i < 0$ 4 fois

$Z_i > 0$ 10 fois

189

densité t_{n-1}

rejet

$-v^*$

0

v^*

rejet
bilatéral

Unilatéral

rejet

$-v^* < v^* < 0$

195 $Pr_{H_0}(T \leq -v^*)$

$= Pr_{H_0}(T \leq -v^*)$

$+ Pr_{H_0}(T \geq v^*)$

$= 2 Pr_{H_0}(T \geq v^*)$

$= \alpha \Leftrightarrow Pr_{H_0}(T \leq -v^*) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$$t_{obs} = \frac{999 - 1000}{\sqrt{69.88/10}}$$

201

IC du pivot de la dispositive 180.

Pour $\alpha \in (0, 1)$ on choisit $s > 0$ tel que
 $\alpha = \Pr(T_n \leq s)$. Donc

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \Pr(T_n > s) = 1 - \Pr(T_n \leq s) \\ &= 1 - \Pr_{\theta} \left(\frac{M_n}{\theta} \leq s \right) = 1 - \Pr_{\theta} \left(\theta \geq \frac{M_n}{s} \right) \\ &= \Pr_{\theta} \left(\frac{M_n}{s} \geq \theta \right) \end{aligned}$$

M_n continue

Pour trouver s on a $\alpha = \Pr(T_n \leq s) = s^n$
donc $s = \alpha^{1/n}$ et on obtient IC
 $[-\infty, M_n \alpha^{-1/n}]$. Or, forcément

$\theta \geq M_n$ donc on peut prendre
 $[M_n, M_n \alpha^{-1/n}]$.

Remarque On aurait pu commencer par choisir t tel que $\alpha = \Pr(T_n \geq t)$. Cela amène à l'intervalle $[M_n(1-\alpha)^{1/n}, \infty)$ qui est également un intervalle de confiance valide.

196

 t_{n-1}  $-t_{obs}$ t_{obs} $Pr_{H_0}(|T| > |t_{obs}|)$

$$P_{obs} = Pr_{H_0}(|T| > |t_{obs}|)$$

$$= Pr_{H_0}(T > |t_{obs}|) + Pr_{H_0}(T < -|t_{obs}|)$$

symétrie

$$= 2 Pr(T < -|t_{obs}|)$$

$$= 2 F_{t_{n-1}}(-|t_{obs}|)$$

$$s_{\text{norm}} = 2 \left(1 - F_{t_{n-1}}(1 \text{ test}) \right)$$

202

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$T_n^{\mu_0} = \frac{\sqrt{n} (\bar{Y}_n - \mu_0)}{S_n}$$

$$\text{reject } H_0 \iff |T_n^{\mu_0}| > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\iff \mu_0 \notin I \quad \text{de 202}$$

206

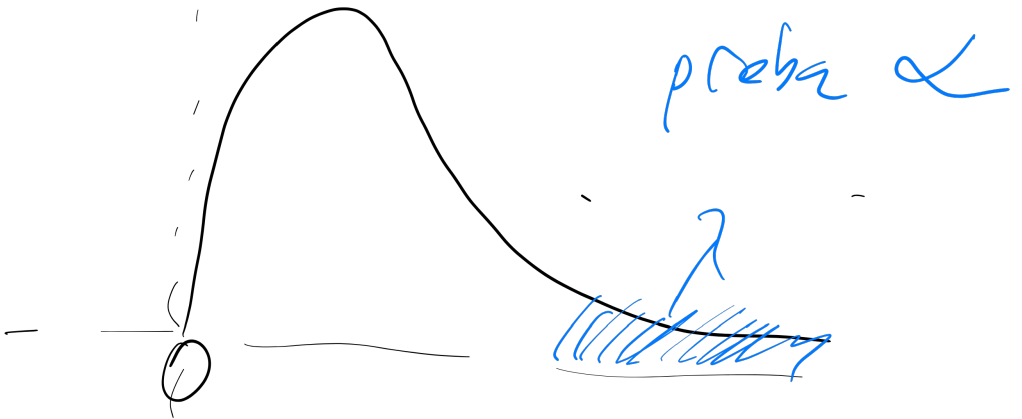
$$e_1 = e_2 = \dots = e_6 = 10$$

$$t_{obs} = \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \dots + \frac{(4-10)^2}{10} = 8.5$$

$$V = 6 - 1 = 5 \quad \alpha = 0.05$$

$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\chi^2_{5,0.95} \approx 11.1 > t_{obs}$$



$$\text{Lot } e_i =$$

$$22,75, 135,91, 341,34$$

$$341,34, 135,91, 22,75$$

$$t_{obs} = \frac{(34 - 22,75)^2}{22,75} + \dots$$

$$+ 13,2 \chi^2_{n-1, 0,95} = \chi^2_{6-1, 0,95}$$

(210)

$$t_{obs} = \frac{\left(32 - \frac{44 \times 52}{95}\right)^2}{\left(\frac{44 \times 52}{95}\right)} + \dots + \frac{\left(9 - \frac{15 \times 43}{95}\right)^2}{\left(\frac{15 \times 43}{95}\right)}$$

$$\approx 10.67 > 5.99 = \chi^2_{2, 0.95}$$

$$v = (2-1)(3-1) = 2 \quad \boxed{\text{reject}}$$

