Méthode des moments

Exemple Soient $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$. Estimer θ.

Solution On choisit $k = 1$. On a $m_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta[X_1] = \int_0^\theta (1/\theta) x dx = \theta/2$. Le moment empirique est $\widehat{m}_1 = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}_n$. $\widehat{\theta}_{MOM}$ est la solution de l'équation $m_1(\theta) = \widehat{m_1}$, c'est–à–dire $\theta/2 = \overline{X}_n$. La solution est donc $\widehat{\theta}_{MOM} = 2\overline{X}_n$.

À noter que cet estimateur peut ne pas avoir du sens : si $n = 3$ avec l'échantillon $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$ alors $\widehat{\theta}_{MOM} = 8/3 < 3$ ce qui n'est pas possible.

À noter également qu'on aurait pu choisir $k = 2$ pour obtenir une équation

$$\frac{\theta^2}{3} = m_2(\theta) = \widehat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

de sorte que $\widehat{\theta}_{MOM} = \sqrt{3 \sum_{i=1}^n X_i^2 / n}$.

Méthode des moments

Exemple Soient $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Estimer μ et σ^2.

Solution On a 2 paramètres donc on a besoin de 2 équations. On utilise $k = 1, 2$, mais d'autres choix telles que $k = 3, 5$ sont tout à fait possibles.

$$m_1(\mu, \sigma^2) = \mathbb{E}_{\mu,\sigma^2}[X_1] = \mu,$$

$$m_2(\mu, \sigma^2) = \mathbb{E}_{\mu,\sigma^2}[X_1^2] = \mu^2 + \sigma^2.$$

$$\widehat{m}_1 = \overline{X}_n, \qquad \widehat{m}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} m_1(\mu, \sigma^2) = \widehat{m}_1 \iff \mu = \overline{X}_n, \\ m_2(\mu, \sigma^2) = \widehat{m}_2 \iff \mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

Donc $\widehat{\mu}_{MOM} = \overline{X}_n$ et $\widehat{\sigma^2}_{MOM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{X}_n^2$.