GC – Probabilités et Statistique – Série 7

En salle

Exercice 1 Soient $X_1, \dots, X_n$ iid $N(\mu, \sigma^2)$.

(a) Trouver le biais de $\hat{\mu} = \overline{X}$

(b) Trouver le biais de $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n}$

(utiliser le fait que le biais de $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = 0$, c.-à-d. $E(S^2) = \sigma^2$).

(c) Trouver le biais asymptotique de $\hat{\sigma}^2$ de la partie (b)).

Exercice 2 Soient $X_1, \dots, X_n$ iid $Pois(\lambda)$ variables aléatoires, et $Y_1, \dots, Y_m$ iid $Pois(2\lambda)$ variables aléatoires, indépendants de $X_1, \dots, X_n$. Trouver

(a) $L(\lambda)$

(b) $\ell(\lambda)$

(c) $\hat{\lambda}_{EMV}$

(d) $J(\lambda)$

(e) $I(\lambda)$

(f) Est-ce que $\hat{\lambda}_{EMV}$ est biaisé ?

(g) Donner un intervalle de confiance approximatif à 95% pour λ.

À domicile

Exercice 1 Soient $X_1, \dots, X_n$ iid $Pareto(a,\, b)$; c.-à-d., $f(x) = \dfrac{a\, b^a}{x^{a+1}},\ a > 0,\ b > 0,$ $b \leq x < \infty$. Supposons que la valeur de b est connue.

Calculer $L(a)$, $\log L(a)$, $\hat{a}_{EMV}$. Vérifier qu'il s'agit d'un maximum.

Exercice 2 Soient $Y_1, \dots, Y_n$ *iid* $Exp(\lambda)$; c.-à-d., $f(y) = \lambda\, e^{-\lambda\, y},\ \lambda > 0$.

(a) Calculer $L(\lambda)$, $\log L(\lambda)$, $\hat{\lambda}_{EMV}$. Vérifier qu'il s'agit d'un maximum.

(b) Calculer $J(\lambda)$ et $I(\lambda)$, et donner la forme d'un IC approximatif de 95% pour λ.

Exercice 3 Soient $Y_1, \dots, Y_n$ iid $Bernoulli(p)$. Trouver l'EMV de $p(1-p)$.