GC – PROBABILITÉS ET STATISTIQUE – SÉRIE 6

En salle

Exercice 1 La densité conjointe de deux variables aléatoires X et Y est donnée par

$$f(x,y) = x + y, \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1; \quad = 0 \text{ sinon.}$$

(a) Vérifier que $f(x,y)$ représente bien une fonction de densité.
(b) Déterminer les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.
(c) X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.
(d) Calculer $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$, $Var(Y)$.

Exercice 2 La densité conjointe de X et Y est $f(x,y) = c(x^2 - y^2)e^{-x}, \quad 0 \le x < \infty$, $-x \le y \le x$ ($= 0$ sinon). Trouver la distribution conditionnelle (fonction de répartition conditionnelle) $F_{Y|X=x}(y \mid x)$ de Y, étant donné que $X = x$.

Exercice 3 Il a été évalué que chaque client de restaurant dans le canton dépense en moyenne 12 francs pour un dîner, avec un écart-type de 4 francs. Un restaurant pris au hasard a sélectionné un échantillon des additions de 49 clients.

(a) Utiliser le théorème central limite (TCL) pour calculer la probabilité que la valeur moyenne des 49 additions soit plus élevée que 14 francs.
(b) Cent restaurants (indépendants) ont fait l'objet de la même étude. Ce qui veut dire que chaque restaurant a dû choisir les additions de 49 de ses clients et indiquer le montant moyen. Combien de restaurants devraient en principe signaler un montant moyen de 14 francs ou plus ?

À domicile

Exercice 1 La densité conjointe des VAs X, Y continues est

$$f(x,y) = \frac{x}{5} + cy, \ 0 < x < 1, \ 1 < y < 5; \quad 0 \text{ sinon.}$$

(a) Trouver c
(b) X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.
(c) Trouver $P(X + Y > 3)$

Exercice 2 La fonction de densité simultanée de X et Y est

$$f(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), \quad 0 < x < 1, \ 0 < y < 2 \ ; \ = 0 \text{ sinon.}$$

(a) Vérifier que c'est bien là une fonction de densité conjointe
(b) Déterminer la fonction de densité (marginale) de X
Trouver : (c) $P(X > Y)$ (d) $E[X]$ (e) $E[Y]$

Exercice 3 Supposons un échantillon aléatoire de 64 bonbons est sélectionné. La masse moyenne de ces bonbons ($\overline{x}$) égale 90 grammes, et la valeur de l'écart-type s est de 10 grammes.

(a) Donner un intervalle de confiance (approximatif) à 95% pour la masse moyenne μ de la population des bonbons.
(b) Poser vos suppositions.
(c) Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour que la longueur de l'IC à 95% pour μ soit inférieur à 1 ?
(d) Recalculer l'intervalle pour un niveau de confiance plus élevé, soit 99%.
(e) Vérifier que l'intervalle obtenu dans (d) est plus large que celui obtenu dans (a) ; expliquer ce fait.