

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE – PROBLÈMES DE RÉVISION

Exercice 1

- Parmi 10 couples mariés (une femme + un homme), on va sélectionner un groupe de 6 personnes qui n'est pas permis de contenir un couple marié.
 - Il y a combien de choix ?
 - Il y a combien de choix si le groupe doit en plus contenir 3 hommes et 3 femmes ?
- De combien de façons peut-on arranger les lettres du mot MISSISSIPPI si les quatre I's doivent NE PAS apparaître ensemble ?
- De combien de façons peut-on arranger les 8 lettres du mot ILLINOIS si le N doit apparaître quelque part à gauche du S. Par exemple, LIONLISI est l'un de ces arrangements.
- De combien de façons 8 enfants peuvent-ils être assis à une table RONDE lors d'une fête d'anniversaire s'ils sont assis garçon-fille-garçon-fille ... ?

Exercice 2 Dans une étude, on a demandé aux médecins quels seraient le risque (la probabilité) de cancer du sein dans une femme dont on pensait initialement d'avoir une risque de cancer de 1% mais qui s'est retrouvé avec un résultat positif à la mammographie. Une mammographie classe correctement environ 80% des tumeurs qui sont vraiment des cancers et 90% des tumeurs bénignes.

95 médecins sur cent (100) estiment la probabilité de cancer à environ 75%. Êtes-vous d'accord ? Expliquer.

Exercice 3 Pendant un match de foot typique, l'espérance du nombre de blessures par équipe est 3.2. Trouver la probabilité qu'une équipe aura au plus 1 blessure dans ce match.

Exercice 4 Soit X et Y variables aléatoires conjointes avec densité :

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{x}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Trouver c .
- Trouver la densité marginale de Y , $f_Y(y)$.
- X et Y sont-elles indépendantes ? Expliquer.
- Trouver la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$, $f_{X|Y}(x | y)$
- Trouver $E[X | Y = y]$ pour $0 \leq y \leq 1$.
- Trouver $Var(X | Y = y)$ pour $0 \leq y \leq 1$.

Exercice 5 Les intervalles Y entre les arrivées des SPAMs d'une source sont distribués comme

$$f(y; \lambda) = \lambda^2 y e^{-y\lambda}, \quad y > 0, \lambda > 0.$$

- Trouver la log vraisemblance, basée sur les intervalles indépendants y_1, \dots, y_n entre des SPAMs issus de cette source.
- Trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance de λ et l'information observée.
- Voilà $n = 10$ intervalles (en secondes) :

25 14 27 31 4 35 17 3 15 19

Donner l'estimation de maximum de vraisemblance de λ et un intervalle de confiance à 95% pour λ basé sur ces données.

- Trouver une estimation de $\psi = \log \lambda$ et un intervalle de confiance pour ψ à 90%.