**Exemples 6**
**(ignorez les nombres ecrits, regardez les nombres en gras et souslignes)**

**<u>6.1</u>**

Ex. 8.2 $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & 0<x<\infty \;,\; 0<y<\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(*) Stratégie: trouver la région d'intégration (les bornes)

a) $P(X>1, Y<1) = \int_0^1\int_1^\infty 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy = \int_0^1 2e^{-2y}\left(-e^{-x}\Big|_{x=1}^{\infty}\right)dy$

$= [-e^{-\infty} - (-e^{-1})]\int_0^1 2e^{-2y}dy = e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}dy = e^{-1}\left(-e^{-2y}\Big|_{y=0}^{1}\right) = \underline{e^{-1}(1-e^{-2})}$

b) $P(X<Y) = \iint_{\{(x,y):\, x<y\}} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy = \int_{y=0}^\infty\int_{x=0}^{y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy = \int_0^\infty 2e^{-2y}(1-e^{-y})dy$

$= \int_0^\infty 2e^{-2y}dy - \int_0^\infty 2e^{-3y}dy = -e^{-2y}\Big|_{y=0}^{\infty} - \frac{2}{3}\left(-e^{-3y}\Big|_{y=0}^{\infty}\right)$

$= -e^{-\infty}-(-e^{-0}) - \frac{2}{3}(-e^{-\infty}-(-e^{-0})) = 1 - \frac{2}{3}\times 1 = \underline{\frac{1}{3}}$

c) $P(X<a) = \int_{x=0}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{a}\left[\int_{y=0}^{\infty} 2e^{-x}e^{-2x}dy\right]dx = \int_{x=0}^{a} e^{-x}\left[\int_{y=0}^{\infty} 2e^{-2y}dy\right]dx$

$= \int_0^a e^{-x}dx = \underline{1-e^{-a}}$ [densité exponentielle]

**<u>6.2</u>**

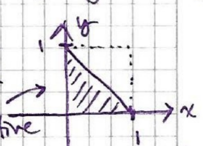
Ex 8.4 a) $f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x}e^{-3y} \rightarrow \times[I(0<x<\infty)\times I(0<y<\infty)] & 0<x<\infty \;,\; 0<y<\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ← add after (b)

→ la densité se factorise (facteurs séparés de x et y) $f(x,y) = g(x).h(y)$

⇒ DONC, indépendantes

b) $f(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0<x<1 \;,\; 0<y<1 \;,\; 0<x+y<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

région de densité positive




Problème: impossible d'exprimer la région en forme de: $x\in A$, $y\in B$ (contrainte de la somme)

→ Soit $I(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<\infty \;,\; 0<y<\infty \;,\; 0<x+y<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

variable indicatrice

dépende des deux variables x et y

$\Rightarrow f(x,y) = 24\,\underset{g(x)}{x}\,\underset{h(y)}{y}\cdot\underbrace{I(x,y)}_{u(x,y)}$ → x, y inséparable

⇒ la densité conjointe NE SE FACTORISE PAS ⇒ PAS indépendantes

**<u>6.3</u> (sur les diapos – quelle distribution ==> Poisson(lambda1 + lambda2)**

**6.4**

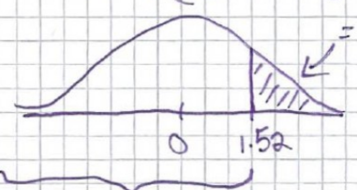
Ex. 8.4 a) 1. Let $X$ = weight (kg) of 49 people in elevator

2. $X = X_1 + \cdots + X_{49} \overset{\text{approx}}{\sim} N(\mu = 49 \times 70 = 3430,$
$\sigma = \sqrt{49} \times 16 = 112)$ [CLT]

3. $P(X > 3600)$

4. $= P\left(\boxed{\dfrac{X-3430}{112}} > \dfrac{3600-3430}{112}\right)$ [standardize]

$\approx P(Z > 1.52)$ [CLT]




$= 1 - 0.9357$
$= \underline{0.0643}$
$(\approx 6\tfrac{1}{2}\%)$

$\Phi(1.52) = 0.9357$

**6.5**

a) Estimez $\mu$ : $\hat{\mu} = \bar{X}$ $(= 23,412)$

b) En supposant que le TCL s'applique, alors

$\bar{x} \pm \underbrace{1.96}_{\approx 2} \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow 23,412 \pm (\underset{\text{ou } 2}{1.96}) \times \dfrac{2000}{\sqrt{16}}$

ou $23,412 \pm 1000$

ou $(22,412 , 24,412)$

**6.6** IC : X-bar +/- Z * s/sqrt(n) ==> 72 +/- 1.645 * 15/sqrt(25)

**Z : 90% entre -Z et Z ==> 10% dehors ==> (90 + 10/2)% au gauche de Z**
**==> Z = 1.645 (ou 1.64 ou 1.65 ok aussi)**

**6.7**

a) Il n'y a pas un échantillon, on a la population entière
$\Rightarrow$ il n'est pas appropié, il n'y a pas un paramètre inconnu.

b) Oui, en supposant que le TCL s'applique : $\bar{x} \pm \underset{(\text{ou } 2)}{1.96} \times \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow 75 \pm 2 \times \dfrac{15}{\sqrt{400}}$ ou $75 \pm 1.5$ ou $(73.5, 76.5)$

c) Non : le TCL s'applique pour n'importe quelle distribution de poids dans la population (si la taille de l'échantillon $n$ est 'suffisament grande'.