Probabilités et Statistique I – Ébauche Corrigés pour les roblèmes de révision 1

Exercice 1 (a) (i) Choisissez d'abord six couples mariés d'avoir un membre du groupe, puis sélectionnez l'un des individus de chaque couple. Par le principe fondamentale de dénombrement généralisé, il y a $\boxed{\binom{10}{6}2^6}$ $(= \underline{13,440})$ choix différents.

(ii) Choisissez d'abord le 6 couples mariés d'avoir un membre du groupe, puis choisissez 3 des couples d'avoir un homme dans le groupe (les 3 autres ont une femme dans le groupe).

En utilisant encore une fois le principe fondamentale généralisé, il y a $\boxed{\binom{10}{6}\binom{6}{3} = \frac{10!}{4!3!3!}}$ $(= \underline{4200})$ choix différents.

(b) **<u>Stratégie</u> :**

1. Trouver le nombre total de permutations possibles (1).
2. Trouver le nombre de permutations lorsque les I's SONT tous ensemble (2).
3. Soustraire (1) − (2) pour obtenir le nombre de permutations quand les quatre I's ne sont PAS ensemble.

(1) Le mot MISSISSIPPI comprend un M, quatre I's, quatre S's, deux P's pour un total de 11 lettres. Le nombre d'arrangements de tous types possibles avec les informations données est :

$$\frac{11!}{4!4!2!1!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 2} = 11 \times 10 \times 9 \times 7 \times 5 = 990 \times 35 = \underline{34,650}.$$

(2) Nous trouvons maintenant le cas où tous les I's SONT ensemble et nous le considérons donc comme un seul paquet ou unité. Nous avons donc maintenant une UNITÉ de quatre I's, un M, quatre S's, deux P's, pour un total de 8 unités.

Par conséquent, le nombre d ?arrangements possibles lorsque tous les I's sont réunis est :

$$\frac{8!}{4!2!1!1!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2} = 1680/2 = \underline{840}.$$

(3) D'où les permutations distinctes des lettres du mot MISSISSIPPI lorsque quatre I's ne se rejoignent PAS = 34,650 - 840 = $\underline{\underline{33{,}810}}$.

(c) Il y a : 3 I's, 2 L's, 1 N, 1 O, et 1 S. Le nombre total de permutations $= \frac{8!}{3!\,2!} = 3360$; la moitié d'entre eux ont N à gauche de S $\rightarrow 3360/2 = \underline{1680}$.

(d) Le premier enfant, disons une fille, est assis d'UNE SEULE FAÇON, puisque tous les sièges à une table RONDE sont considérés comme IDENTIQUES. Une fois qu'elle est assise, il reste 3 sièges pour les 3 autres filles, qui peuvent être assises de $3\,! = 6$ façons. Les 4 garçons peuvent alors être assis sur les 4 sièges restants de $4\,! = 24$ façons.

Par conséquent, selon le principe fondamental de dénombrement généralisé, le nombre total de façons d'asseoir les huit enfants est $1 \times 3! \times 4! = 6 \times 24 = \underline{144}$.

Exercice 2 Introduisons les événements :

$+$ = résultat est positif
$-$ $(= +^C)$ = résultat est negatif
B = tumeur est bénign
M $(= B^C)$ = tumeur est maligne.

Selon les informations du problème, on a que $P(M) = 0.01$, alors $P(B) = 1 - P(M) = 0.99$.

On a aussi les probabilités conditionnelles :

$P(+ \mid M) = 0.80$ et $P(- \mid B) = 0.90$ (et puisque '$-$' $= +^C$, on a $P(+ \mid B)$ $= 1 - P(- \mid B) = 0.10$).

En utilisant la Formule de Bayes, on a :

$$P(M \mid +) = \frac{P(+ \mid M)\, P(M)}{P(+ \mid M)\, P(M) + P(+ \mid B)\, P(B)} = \frac{0.80 \times 0.01}{0.80 \times 0.01 + 0.10 \times 0.99} \approx 0.75.$$

Donc la probabilité est approximativement 7.5%, très loin de 75% $\implies$ ÊTRE EN DÉSACCORD.

Exercice 3 1. Soit X = nombre de blessures

2. $X \sim Pois(\lambda = 3.2)$. [On peut penser qu'il y a un grand nombre d'opportunités n pour une blessure (p. ex. chaque 'personne-minute'), la probabilité p de blessure à chaque opportunité est petite, $np = 3.2$. Donc X doit être distribuée (approximativement) selon la loi de Poisson.]

3, 4. $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-3.2} + 3.2e^{-3.2} = \underline{\underline{4.2\, e^{-3.2}}}$ $[\approx 0.05]$.

Exercice 4 (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{y^2}^1 f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy = 1$

$$\implies \int_0^1 \int_{y^2}^1 cxy\, dx\, dy = 1 \implies c \int_0^1 y \left[\int_{y^2}^1 x\, dx\right] dy = 1 \implies c \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{y^2}^1 dy = 1$$

$$\implies c \int_0^1 y \left[\frac{1 - y^4}{2}\right] dy \Bigg|_0^1 = 1 \implies c \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^6}{12}\right]\Bigg|_0^1 = 1 \implies c \cdot \frac{1}{6} = 1 \implies \underline{c = 6}.$$

(b) Pour trouver $f_Y(y)$ pour $0 \leq y \leq 1$, on peut écrire $f_Y(y) = \displaystyle\int_{y^2}^1 6xy\, dx = 3x^2 y \Big|_{y^2}^1 = 3y(1 - y^4)$

$$\implies \boxed{f_Y(y) \begin{cases} 3y(1 - y^4) & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) NON, elles ne sont PAS indépendantes. On peut le voir en incorporant les contraintes dans la densité conjointe à l'aide de variables indicatrices ($I(\cdot) = 1$ si le la condition est vraie, $= 0$ sinon) :

$f_{X,Y}(x, y) = 6xy \cdot I(0 \leq x \leq 1) \cdot I(0 \leq y \leq \sqrt{x})$; maintenant, on pose $s(x) = 6xI(0 \leq x \leq 1)$, $t(y) = y$, and $k(x, y) = I(0 \leq y \leq \sqrt{x})$. Alors $f_{X,Y}(x, y) = s(x) \cdot t(y) \cdot k(x, y) \neq g(x) \cdot h(y)$, et par conséquent X et Y ne sont PAS indépendantes (grâce au Théorème de Factorisation).

Également, on peut trouver $f_X(x)$ et remarquer que la densité conjointe $f_{X,Y} \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, qui encore une fois, en utilisant le Théorème de Factorisation, montre que X et Y ne sont PAS indépendantes.

(d) Pour $0 \leq x \leq 1$ ET $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, on a : $f_{X|Y}(x \mid y) = \dfrac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \dfrac{6xy}{3y(1 - y^4)}$

$$\implies \boxed{f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \frac{2x}{1 - y^4} & y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(e) $E[X \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y) dx = \int_{y^2}^{1} x \frac{2x}{1-y^4}\, dx = \frac{2x^3}{3(1-y^4)}\Big|_{y^2}^{1} = \boxed{\frac{2(1-y^6)}{3(1-y^4)}.}$

(f) Utiliser la Formule Alternataive pour la variance d'une variable alátoire W :
$Var(W) = E[W^2] - (E[W]^2)$.
Ici, notre W est $X \mid Y = y$. On a dj́à trouvé $E[X \mid Y = y]$ dans la partie (e). Maintenant, on a besoin de $E[X^2 \mid Y = y]$:

$$E[X^2 \mid Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_{X|Y}(x|y)\, dx = \int_{y^2}^{1} x^2 \frac{2x}{1-y^4}\, dx = \frac{2x^4}{4(1-y^4)}\Big|_{y^2}^{1} = \boxed{\frac{(1-y^8)}{2(1-y^4)}.}$$

$$\implies Var(X \mid Y) \;=\; \boxed{\frac{(1-y^8)}{2(1-y^4)} - (\frac{2(1-y^6)}{3(1-y^4)})^2.}$$

Exercice 5 **(a)** Les observations sont indépendantes et donc leur densité conjointe est le produit des densités individuelles. La vraisemblance est donc :

$$L(\lambda) = f(y; \lambda) = \prod_{j=1}^{n} \left\{\lambda^2 y_j e^{-y_j \lambda}\right\},$$

et alors

$$\ell(\lambda) = 2n \log \lambda - \lambda \sum_{j=1}^{n} y_j + c, \quad \lambda > 0,$$

où c est une constante independante de λ.

(b) En dérivant, on a

$$\log L'(\lambda) = 2n/\lambda - \sum_{j=1}^{n} y_j, \quad \ell''(\lambda) = -2n/\lambda^2,$$

et donc $\hat\lambda = 2n/\sum_{j=1}^{n} y_j$, $J(\lambda) = 2n/\lambda^2 > 0$. Puisque $\ell''(\lambda) < 0$, $\hat\lambda$ est la valeur qui maximise la vraisemblance.

(c) Ici, $n = 10$ et $\sum y_j = 190$; donc $\hat\lambda = 0.105$, $J(\hat\lambda) = 2n/\hat\lambda^2 = 1805$. Donc l'IC à 95% est donnée par $\hat\lambda \pm 1.96/\sqrt{J(\hat\lambda)} = \boxed{(0.059, 0.151)\text{ seconds}^{-1}\ (\approx (0.06, 0.15)\text{ par seconde})}$.

(d) $\hat\psi = \log \hat\lambda = -2.25$, et puisque la transformation log est monotone, on peut utiliser la propriété d'invariance de l'EMV.

Alors, l'IC à 90% pour ψ est $(\log \lambda_-, \log \lambda_+)$, où (λ_-, λ_+) est l'IC à 90% pour λ. Cela est $\hat\lambda \pm 1.645/\sqrt{J(\hat\lambda)} = (0.067, 0.144)$, qui nous donne $(-2.71, -1.94)$ comme l'IC à 90% pour ψ.