

À noter : les raisonnements/justifications des étapes de résolution sont également importantes (pas seulement le résultat final).

En salle

Exercice 1 (a) $\frac{X-b}{a-b} = 1$ avec la probabilité p ou 0 avec la probabilité $1-p$, donc X est une variable aléatoire de Bernoulli(p).

$$\begin{aligned}
 \text{(b) La variance d'une VA de Bernoulli}(p) &= p(1-p) = \text{Var}\left(\frac{X-b}{a-b}\right) && [\text{substitution}] \\
 &= \frac{1}{(a-b)^2} \text{Var}(X-b) && [\text{Var}(cY) = c^2 \text{Var}(Y)] \\
 &= \frac{1}{(a-b)^2} \text{Var}(X) && [\text{Var}(Y+c) = \text{Var}(Y)] \\
 \implies \text{donc } \text{Var}(X) &= (a-b)^2 p(1-p).
 \end{aligned}$$

Exercice 2 1. Soit $\underline{X}$ le nombre d'erreurs typographiques sur la page du magazine

2. $\underline{X} \sim \text{Pois}(\lambda = 0.2)$ [l'espérance du nombre d'erreurs = 0.2 selon l'énoncé]

3, 4. $P(\underline{X} = 0) = \boxed{e^{-0.2}}$ (≈ 0.82) [loi de Poisson, substitution]

(b) 3, 4. $P(\underline{X} \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-0.2} - 0.2e^{-0.2}$
 $= \boxed{1 - 1.2e^{-0.2}}$ (≈ 0.018) [loi de Poisson, substitution]

Exercice 3 Soit $\underline{E}$ l'événement que le remède ait un effet ; $P(\underline{E}) = 0.75$, $P(\underline{E}^c) = 0.25$.

1. Soit $\underline{X}$ le nombre de rhumes attrapés

2. $\underline{X} \sim \text{Pois}(\lambda)$, où λ dépende de l'efficacité du remède : s'il est efficace, $\lambda = 3$; sinon, $\lambda = 5$

3. Probabilité que le remède ait un effet : $P(\underline{E} \mid X = 2)$

4. Grace à la **formule de Bayes**, $P(\underline{E} \mid X = 2) = \frac{P(X = 2 \mid \underline{E})P(\underline{E})}{P(X = 2 \mid \underline{E})P(\underline{E}) + P(X = 2 \mid \underline{E}^c)P(\underline{E}^c)}$

$$P(X = 2 \mid \underline{E}) = P(X = 2 \mid \lambda = 3) = e^{-3} 3^2 / 2! \approx 0.2240 \quad [\text{loi Poissonienne}]$$

$$P(X = 2 \mid \underline{E}^c) = P(X = 2 \mid \lambda = 5) = e^{-5} 5^2 / 2! \approx 0.0842 \quad [\text{loi Poissonienne}]$$

$$\Rightarrow P(\underline{E} \mid X = 2) = \frac{0.2240 \times 0.75}{0.2240 \times 0.75 + 0.0842 \times 0.25} \approx \underline{0.89} \quad [\text{formule de Bayes, subst.}]$$

À domicile

Exercice 1 $E[X] = np = 6$; $\text{Var}(X) = np(1-p) = 2.4$.

Alors $6(1-p) = 2.4 \implies (1-p) = 0.4$, donc $p = 0.6$; $np = 6 \implies 0.6n = 6 \implies n = 10$.

$$\text{Alors, } \boxed{P(X = 5) = \binom{10}{5} (0.6)^5 (0.4)^5}.$$

Exercice 2 1. Soit $\underline{X}$ le nombre d'erreurs typographiques sur la page du magazine

2. $\underline{X} \sim \text{Pois}(\lambda = 0.2)$ [l'espérance du nombre d'erreurs = 0.2 selon l'énoncé]

3, 4. $P(\underline{X} \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-0.2} - 0.2e^{-0.2}$

$$= \boxed{1 - 1.2e^{-0.2}} \quad (\approx 0.018) \quad [\text{loi de Poisson, substitution}]$$