EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Série 9**

Exercice 1. Un espace mal pointé. Montrer qu'avec sa topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$ le peigne du topologue $0 \times I \cup I \times 0 \cup \{1/n \mid n \geq 1\} \times I$ n'est pas bien pointé en $(0;1)$.

Exercice 2. Soit I un ensemble quelconque et $(A_i, a_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces bien pointés. Montrer que

$$\pi_1(\bigvee_{i \in I}(A_i)) \cong \mathop{*}_{i \in I} \pi_1(A_i)$$

Exercice 3. Attachement de 1−cellules. Soit (X, x_0) un espace topologique et $Y = X \cup_f e^1$ où $e_1 = D^1 = I$ et $f\colon S^0 \to X$. On veut calculer $\pi_1(Y)$ en fonction des $\pi_1(X, x)$ pour x dans les différentes composantes connexes de X.

1. Supposons que X soit connexe par arcs et bien pointé. Montrer que $\pi_1(Y) = \pi_1(X) * \mathbb{Z}$.
2. Notons Z_1 la composantes connexe de x_0 dans X et Z_2 celle de $f(-1)$. Calculer $\pi_1(Y)$ en fonction de $\pi_1(Z_1)$ et $\pi_1(Z_2)$.

Exercice 4. Espaces projectifs

1. Utiliser la structure cellulaire vue précédement pour calculer $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$.
2. De même pour $\pi_1(\mathbb{CP}^n)$.

Exercice 5. Bouteille de Klein Soit K la bouteille de Klein, vue comme quotient de $I \times I$ en identifiant les bords verticaux orientés dans le même sens et les bords horizontaux orientés dans un sens opposé.

1. Rappeler l'application d'attachement $f\colon\ S^1 \to S^1 \vee S^1$ qui permet de voir K comme $S^1 \vee S^1$ avec une 2−cellule attachée.
2. Donner une présentation de $\pi_1(K)$.

Exercice 6. Calculer les groupes fondamentaux de :

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0);(1;0);\ldots;(n;0)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{R}^3 \setminus (Ox \cup Oy \cup Oz)$
3. $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ où S^1 est le cercle unité dans le plan Oxy.