EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Série 7**

Exercice 1. Montrer que si S^2 est décrite comme l'union de trois fermés A_1, A_2 et A_3, l'un des trois contient nécessairement deux points antipodaux.

Indication : utiliser le théorème de Borsuk-Ulam pour une certaine fonction de distance.

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes entre eux.

Exercice 3. L'argument de Eckmann-Hilton. Soit G un groupe topologique et $m\colon G \times G \to G$ la multiplication. On étudie dans cet exercice le groupe fondamental de G (pour le point de base donné par l'élément neutre 1_G). On définit une loi de composition $\bullet$ sur $\pi_1(G)$. Soient $f, g\colon S^1 \to G$ deux lacets. Le lacet $f \bullet g$ est défini par $(f \bullet g)(t) = m[f(t), g(t)]$.

1. Montrer que $\bullet$ définit bien une loi de composition sur $\pi_1(G)$, c'est-à-dire que $[f \bullet g]$ ne dépend pas du choix des représentants des lacets f et g.
2. Montrer que les lois $\star$ et $\bullet$ vérifient la *loi d'échange* : $(a \star b) \bullet (c \star d) = (a \bullet c) \star (b \bullet d)$.
3. Calculer $(a \star 1) \bullet (1 \star b)$ et $(1 \star a) \bullet (b \star 1)$ pour conclure que $\bullet = \star$ et que cette multiplication est commutative. (On parle ici des deux lois sur $\pi_1(G)$, c'est à dire après le passage au quotient par la relation d'homotopie.)
4. Conclure que $\pi_1(G)$ est un groupe commutatif.

Exercice 4. Sous-groupe normal engendré par... Soit G un groupe et $g_i, i \in I$ des éléments de G. On considère $H = \langle g_i \mid i \in I \rangle$ le sous-groupe engendré par les g_i et $N = \lhd g_i \mid i \in I \rhd$ le sous-groupe normal engendré par les g_i, i.e. le plus petit sous-groupe normal de G contenant les g_i.

1. Montrer que N est l'intersection de tous les sous-groupes normaux de G contenant les g_i.
2. Montrer que H est un sous-groupe de N, mais que $H \neq N$ en général. On pourra utiliser une permutation dans un groupe symétrique ou un mot dans un groupe libre.

Exercice 5. Présentations. Pour chacun des trois exemples suivants, compter le nombre d'éléments et identifier le groupe en question.

1. $D = \langle a, b \mid a^2, b^4, abab \rangle$
2. $Q = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^3 \rangle$

3⋆. $S = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^2 \rangle$

4. Construire un groupe G tel qu'un homomorphisme $G \to H$ corresponde au choix de trois éléments $x, y, z \in H$ avec x de $3-$torsion, y de $6-$torsion, z de $11-$torsion et enfin $xy = yx$.