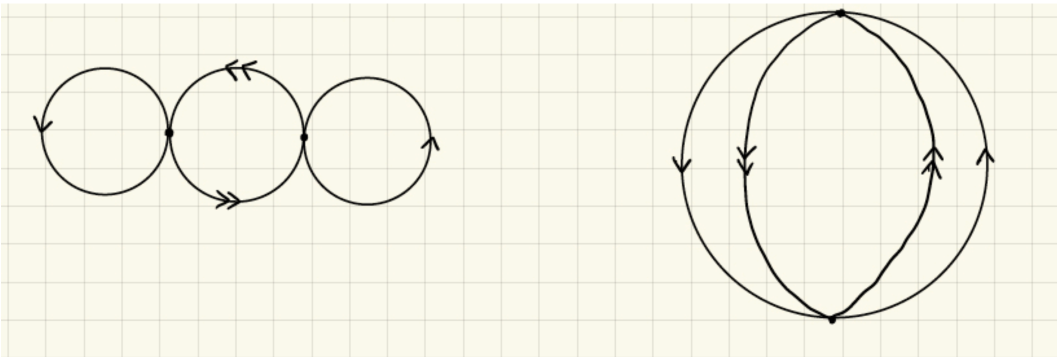
EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Série 6**

Exercice 1. Composition et produits de revêtements. Soient $q : F \to E$, $p : E \to B$, $p' : E' \to B'$ des revêtements.

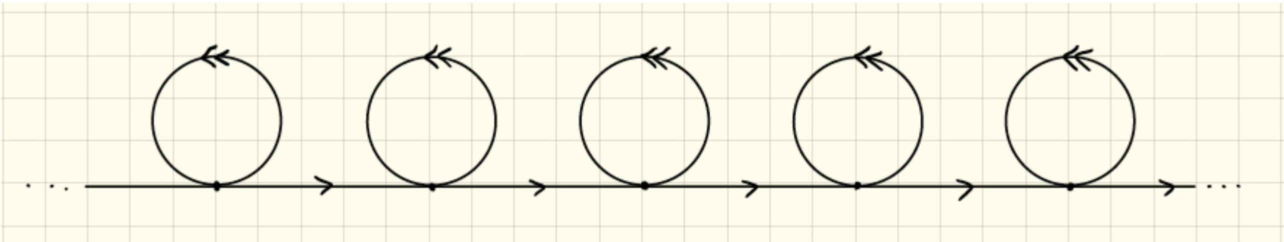
1. Supposons que p est à fibres finies. Montrer que $p \circ q$ est un revêtement.
2. Montrer que $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ est un revêtement.
3. (optionnel) Peut-on enlever l'hypothèse de finitude pour la question 1 ?
4. (optionnel) Est-ce qu'un produit infini de revêtements est toujours un revêtement ?

Exercice 2. Collier de perles. Comprendre, expliquer et démontrer que les espaces suivants forment des revêments d'un bouquet de deux cercles $S^1 \vee S^1$.

1. Deux revêtements à deux feuillets pour commencer :



2. Un revêtement à un nombre infini de feuillets aussi appelé le collier de perles :



3. Dessiner un revêtement contractile du collier de perle.

Exercice 3. Somme connexe de la bouteille de Klein et du plan projectif. Le but est de construire la somme connexe $K\#\mathbb{R}P^2$. Des dessins clairs et des explications concernant les opérations de découpage et d'identification sont demandées mais une paramétrisation explicite n'est pas nécessaire. La bouteille de Klein K est le quotient du carré en identifiant les côtés opposés horizontaux a_1 et a_2 par $(s, 0) \sim (s, 1)$ et les verticaux b_1 et b_2 par $(1, t) \sim (0, 1 - t)$. Pour $\mathbb{R}P^2$ on choisit le modèle D^2 quotienté par la relation antipodale sur le bord.

1. Construire la somme connexe $K\#\mathbb{R}P^2$ en montrant que c'est un espace homéomorphe au quotient d'un hexagone
2. Montrer que $K\#\mathbb{R}P^2$ est un espace homéomorphe à un wedge de trois cercles auquel on attache une unique 2-cellule.

Exercice 4. Homotopies libres et conjugaison. Soit X un espace topologique connexe par arcs, et soit x un point de X. On appelle lacet libre dans X une application continue $f : S^1 \to X$. Deux lacets libres f_0 et f_1 sont dits librement homotopes s'ils sont homotopes (par une homotopie non nécessairement pointée).

Montrer que l'ensemble des classes d'homotopie libre est en bijection avec l'ensemble des classes de conjugaison de $\pi_1(X, x)$.

Exercice 5. Théorème de Brouwer. On appelle rétraction une application (pointée) $r : X \to X$ telle que $r(X) = A$ et $r_{|A} = id_A$. Notons i l'inclusion (pointée) de A dans X. Si a est le point base de A on choisit $x = i(a)$ comme point base pour X.

1. Montrer que si $r : X \to A$ est une rétraction, on a une injection $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, x)$.
2. Montrer que toute application $h : D^2 \to D^2$ admet un point fixe, i.e. $x \in D^2$ tel que $h(x) = x$.

   Indication : Raisonner par l'absurde. Chercher à utiliser la question 1 avec $A = S^1$ et $X = D^2$.