EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Corrigé de la série 4**

Exercice 1. On montre dans cet exercice les versions pointées des résultats expliqués en cours. On note $\mathcal{C}_*$ pour indiquer l'ensemble de toutes les applications continues et pointées.

1. Soit $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application pointée. Montrer que pour tout espace pointé (A, a_0) l'application induite par la composition $f_*\colon \mathcal{C}_*(A, X) \to \mathcal{C}_*(A, Y)$ passe au quotient et définit une application $f_*\colon [A, X]_* \to [A, Y]_*$.
2. Soient $f, g\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ deux applications pointées homotopes (dans le sens pointé). Montrer que pour tout espace pointé (A, a_0) les applications induites $f_*, g_*\colon [A, X]_* \to [A, Y]_*$ sont égales.
3. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces pointés homotopes. Montrer qu'on a une bijection d'ensembles $[A, X]_* \cong [A, Y]_*$ pour tout espace pointé (A, a_0).

Solution 1.

1. La preuve est formellement identique au cas non pointé, à l'exception qu'une homotopie $f \simeq g$ d'applications pointées $X \to Y$ prend maintenant la forme d'une application continue $h : X \rtimes I \to Y$. La notation $X \rtimes Y$ avec un espace pointé (X, x) et un espace non pointé Y désigne le collapse $X \rtimes Y = (X \times Y)/\{x\} \times Y$. Ceci assure que pour tout $t \in I$, l'application $h(\cdot, t) : X \to Y$ est une application pointée.

   Si $u \simeq v : A \to X$ sont des applications pointées homotopes, une telle homotopie h fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "A\rtimes\{0\}"'] \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "f_*u"] & & \\
A \rtimes I \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
A \arrow[u, "A\rtimes\{1\}"] \arrow[ur, "v"'] \arrow[urr, bend right, "f_*v"'] & &
\end{tikzcd}$$

   de sorte que $f \circ h$ fournit une homotopie $f_*u \simeq f_*v$. Il en résulte que f_* induit une application $[A, X]_* \to [A, Y]_*$ sur les classes d'homotopie.

2. Le raisonnement est similaire : une homotopie $h : f \simeq g$ fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
A \rtimes I \arrow[r, "u \rtimes I"] & X \rtimes I \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rr, "h"] & & Y \\
A \arrow[r, "u"'] \arrow[u, "i_1"] & X \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

   pour tout $u : A \to X$, et fournit donc une homotopie $f_*u \simeq g_*u$. En conséquence, les applications induites $f_*, g_* : [A, X]_* \to [A, Y]_*$ sont égales

3. Puisque $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$, on dispose d'applications pointées $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ et d'homotopies $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Par le point précédent, on voit que les applications induites f_*, g_* sont inverses l'une de l'autre, et forment donc des bijections $[A, X]_* \cong [A, Y]_*$.

Exercice 2. Montrer que les espaces suivants sont tous homotopes deux à deux : le cercle S^1, le ruban de Möbius, le plan privé d'un point $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$.

Solution 2.

On détaille le cas du ruban de Möbius que l'on identifie au carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$ avec les identifications $(-1, t) \sim (1, -t)$ pour tout $-1 \leq t \leq 1$. Alors l'application $h : M \times I \to M$ définie par $((t, t'); s) \mapsto (st, t')$ est une homotopie entre id_M et $\iota \circ p$, où $p \colon M \to S^1$ est la projection sur le cercle central (donnée par $(t, t') \mapsto (0, t')$) et $\iota \colon S^1 \to M$ l'inclusion de celui-ci. De plus $p \circ \iota = id_{S^1}$, donc ces deux applications p et ι sont des équivalences d'homotopie.

Exercice 3. Soient $f \colon A \to X$ et $g \colon X \to Y$.

(a) Montrer que f est homotope à une application constante si et seulement si on peut étendre f à une application $F \colon CA \to X$ (telle que $F(a, 1) = f(a)$).

(b) Montrer qu'on peut étendre g à une application $G \colon X \cup_f CA \to Y$ si et seulement si $g \circ f$ est homotope à une application constante.

Solution 3.

(a) On rappelle que le cône CA est le quotient du cyclindre $A \times I$ dont on collapse un couvercle, disons $A \times 0$. Soit $i \colon A \to A \times I$ l'inclusion de A dans l'autre couvercle, i.e. $i(a) = (a; 1)$.

La propriété universelle du quotient assure que les applications $F \colon CA \to X$ qui prolongent f, c'est-à-dire que $F \circ i = f$, sont en correspondance bijective avec les applications $A \times I \to X$ qui sont constantes sur $A \times \{0\}$, et égales à f sur $A \times \{1\}$.

La donnée d'une application $CA \to X$ correspond ainsi précisément à la donnée d'une application $f : A \to X$ et d'une homotopie $f \simeq \mathrm{const}_{x_0}$. Par conséquent f admet un prolongement à CA si et seulement si f est homotope à une application constante.

(b) Par la propriété universelle du pushout, g s'étend en une application $\overline{g} : X \cup_f CA \to Y$ si et seulement s'il existe une application $G : CA \to Y$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "g"] \\ CA \arrow[r, "G"'] & Y \end{tikzcd}$$

commute, c'est-à-dire qu'on peut étendre $g \circ f$ en une application $G : CA \to Y$. Par la partie (a), ceci est possible si et seulement si $g \circ f$ est null-homotope (i.e. homotope à une application constante).

Exercice 4. Type d'homotopie d'un wedge.

1. Soient A et B deux espaces topologiques. Montrer que

$$\pi_0(A \vee B) = \pi_0(A) \vee \pi_0(B)$$

   Soit X le sous-espace de $\mathbb{R}$ formé des points 0 et $1/n$ pour tout entier $n \geq 1$. On construit Y_0 le wedge de $(X, 0)$ avec $(X, 0)$ et Y_1 le wedge de $(X, 1)$ avec $(X, 1)$ (le point de base change).

2. Calculer $\pi_0(X)$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune bijection continue $Y_0 \to Y_1$.
4. Montrer que Y_0 et Y_1 n'ont pas le même type d'homotopie.

Solution 4.
Ici, on utilise que le π_0 est un ensemble pointé (le point base étant la composante connexe par arc du point base), de sorte que cela fait sens de considérer le wedge. On a pas besoin de la topologie pour construire le wedge comme ensemble quotient. On peut donc traiter cette question de manière purement ensembliste. Sinon, on peut munir le π_0 de la topologie discrète, ou encore, comme vous allez le voir en cours, d'une topologie quotient. Cela étant dit, il n'y a pas d'utilité à munir le π_0 d'une topologie et vous pouvez retenir que c'est un ensemble (pointé).

1. La seule chose à vérifier est qu'un élément de A et un élément de B ne sont reliés par un chemin que s'ils sont chacun dans la composante connexe du point d'attache (ou point base) de leur espace. Notons a et b les points bases. La topologie du wedge est construite à partir de celle de A et B, de leur union disjointe et du quotient. Un chemin continu entre $x \in A \setminus \{a\}$ et $y \in B \setminus \{b\}$ dans $A \vee B$ doit nécessairement passer par $[a] = [b]$. En effet, un ouvert du wedge qui ne contient pas le point base mais qui contient l'image de points de A et B a pour préimage au moins deux ouverts disjoints dans $A \setminus \{a\} \cup B \setminus \{b\}$, d'où l'on peut conclure que l'image de $A \setminus \{a\} \cup B \setminus \{b\}$ n'est pas un sous-espace connexe du wedge. On en déduit que x et y sont dans les composantes connexes des points bases.
2. L'espace $X \setminus \{0\} = \{\frac{1}{n} \mid n > 0\}$ ne contient que des points isolés. Pour chaque $n > 0$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon[\cap X = \{\frac{1}{n}\}$ de sorte que tous les singletons $\{\frac{1}{n}\}$ sont des ouverts de X pour $n > 0$.

   Par ailleurs, si $\gamma : I \to X$ est un chemin tel que $\gamma(0) = 0$, alors $\gamma(t) = 0$ pour tout $t \in I$. Sinon, on aurait $\gamma(t) = \frac{1}{n}$ pour un $n > 0$ et $t \in I$. Alors comme $\frac{1}{n}$ est un point isolé de X on a $\gamma(t) = \frac{1}{n}$ pour tout $t \in I$, ce qui est absurde. Ainsi $\{0\}$ est une composante connexe par arcs de X.

   Finalement, X est totalement discontinu (on a une bijection $\pi_0(X) \cong X$) et on trouve $\pi_0(X) = \mathbb{N}$.

3. On note les points de Y_0 et Y_1 comme suit :

$$\begin{aligned} Y_0 &= \{1 - \tfrac{1}{n} \mid n > 0\} \cup \{1\} \cup \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n > 0\} \subset \mathbb{R} \\ Y_1 &= \{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} \mid n > 0\} \cup \{2 - \tfrac{1}{n} \mid n > 0\} \cup \{2\} \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Supposons qu'il existe une telle bijection continue $f : Y_0 \to Y_1$. Alors f doit préserver les points d'accumulation. En effet, si $x \in Y_0$ est un point d'accumulation, on peut trouver une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y_0 tels que $x_n \to x$ quand $n \to \infty$ et $x_n \neq x$ pour tout n. Alors $f(x_n) \to f(x)$ car f est continue et $f(x_n) \neq f(x)$ pour tout n car f est bijective. Donc $f(x)$ est un point d'accumulation de Y_1.

Dans Y_0 le point 1 est d'accumulation, alors que dans Y_1 les points 0 et 2 sont d'accumulation. On a alors $f(1) = 0$ ou 2. Traitons le cas $f(1) = 0$. Notons y l'unique point de Y_0 tel que $f(y) = 2$ et soit W un voisinage de y. Comme f est continue, on peut trouver un voisinage V de 2 dans Y_1 tel que $f^{-1}(V) \subset W$. Comme 2 est un point d'accumulation dans Y_1, V contient une infinité de points. Puisque f est bijective, $f^{-1}(V) \subset W$ contient aussi une infinité de points. Or W est quelconque, et on trouve donc que tout voisinage de y dans Y_0 contient une infinité de points. Ainsi, on doit avoir $y = 1$, ce qui est absurde car $f(1) = 0$ par hypothèse.

<u>Remarque</u> : En fait on a montré qu'une bijection continue $f : X \to Y$ préserve et <u>crée</u> les points d'accumulation, c'est-à-dire que x est un point d'accumulation de X si <u>et seulement si</u> $f(x)$ est un point d'accumulation de Y.

4. Par les points 1 et 2, on trouve que Y_0 et Y_1 sont totalement discontinus (donc on a des bijections $\pi_0(Y_i) \cong Y_i$). Une équivalence d'homotopie $f : Y_0 \to Y_1$ induit en particulier une bijection $\pi_0(f) : \pi_0(Y_0) \cong \pi_0(Y_1)$. Puisque ces espaces sont totalements discontinus, f coincide avec $\pi_0(f)$ de sorte que f est une bijection continue $Y_0 \to Y_1$. Par le point 3, une telle bijection ne peut exister. Ainsi, Y_0 et Y_1 n'ont pas le même type d'homotopie.

Exercice 5⋆. Soit $\omega = e^{2\pi i/3}$ une racine troisième de l'unité. On définit une action du groupe cyclique à trois éléments C_3 sur la sphère $S^3 = \{(a;b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}$ en faisant agir le générateur par $(a;b) \mapsto (\omega a; \omega^2 b)$. L'espace quotient S^3/C_3 est un *espace lenticulaire*, noté $L(3,2)$. On considère trois points $e_0^0 = (1;0), e_1^0 = (\omega;0)$ et $e_2^0 = (\omega^2;0)$ et on définit pour $0 \leq r \leq 2$:

$$
\begin{aligned}
e_r^1 &= \{(e^{i\theta};0) \mid 2\pi r/3 \leq \theta \leq 2\pi(r+1)/3\} \\
e_r^2 &= \{(\rho e^{i\theta}; \sqrt{1-\rho^2}e^{2\pi i r/3}) \mid 0 \leq \theta < 2\pi; 0 \leq \rho \leq 1\} \\
e_r^3 &= \{(\rho e^{i\theta}; \sqrt{1-\rho^2}e^{i\theta'}) \mid 0 \leq \theta < 2\pi; 0 \leq \rho \leq 1; 2\pi r/3 \leq \theta' \leq 2\pi(r+1)/3\}
\end{aligned}
$$

1. Montrer que $L(3,2)$ est compact.
2. Montrer que e_r^m est homéomorphe à un disque D^m dont le bord est constitué de cellules e_r^i avec $i < m$.
3. Montrer que l'action de C_3 permute transitivement ces cellules.
4. Conclure que $L(3,2)$ admet une structure cellulaire $e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$ avec exactement une cellule de dimension m pour tout $0 \leq m \leq 3$.

Solution 5⋆.

1. $L(3,2) = S^3/C_3$ est compact car c'est un quotient de S^3 qui est compact.
2. Les 2-cellules sont décrites via une paramétrisation par un angle $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et un module $0 \leq \rho \leq 1$. On voit donc que e_r^2 est de fait l'image d'un rectangle $[0,2\pi] \times [0,1]$. Analysons cette image plus en détail puisqu'elle n'est pas homéomorphe au rectangle. En effet le segment $[0,2\pi] \times 0$ est envoyé constamment sur $(0, e^{2\pi r/3})$ et comme la formule donnée coïncide

en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, la prétendue 2-cellule est l'image du collapse de ce rectangle par un côté et dont on identifie deux autres côtés opposés. Ce quotient est homéomorphe à un disque (dont le bord provient de $[0, 2\pi] \times 1$ et le centre est l'image du segment $\rho = 0$). On vérifie ensuite que sur ce quotient la formule $(\rho e^{i\theta}, \sqrt{1-\rho^2} e^{2\pi r/3})$ définit un homéomorphisme avec e_r^2.

De même, et sans entrer trop dans les détails, les e_r^3 sont des images de cubes $[0, 2\pi] \times [0, 1] \times [2\pi r/3, 2\pi(r+1)/3]$. Les identifications qui sont faites, si on pense au nouveau paramètre θ' comme étant vertical, sont les suivantes : la face verticale $\rho = 0$ est contractée horizontalement en un segment vertical (qui va devenir l'âme du cylindre que je décris dans ma phrase suivante). Les deux faces verticales adjacentes $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$ sont identifiées si bien qu'on peut penser à ce stade à un cylindre vertical dont les bases horizontales viennent des faces horizontales du cube, $\theta' = 2\pi r/3$ et $\theta' = 2\pi(r+1)/3$. Le bord vertical est encore contracté verticalement en un cercle et c'est ce quotient qui est homéomorphe à e_r^3.

3. Le générateur g de C_3 agit sur les e_r^n par $g.e_r^n = e_{r+1}^n$. On en déduit que l'action de C_3 permute transitivement les e_r^n pour chaque n.

4. Les e_r^n définissent une structure cellulaire sur S^3 donnée par $S^3 = \bigcup_{n=0}^3 \bigcup_{r=0}^2 e_r^n$. On a trois n-cellules pour chaque $n = 0, 1, 2, 3$ (12 cellules en tout). Cette structure est compatible avec l'action de C_3. Elle passe donc au quotient et définit une structure cellulaire $L(3, 2) = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup e^3$ comportant une seule n-cellule pour chaque $n = 0, 1, 2, 3$, donnée par $e^n = [e_r^n]$.