EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Série 3**

Exercice 1. Soit G un groupe topologique.

1. Supposons G séparé. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que G/H est séparé si et seulement si H est fermé dans G.

   Indication. Définir $f\colon G \times G \to G$ par $f(x, y) = x^{-1}y$ et identifier la préimage de H comme le graphe de la relation définie par le passage au quotient par H.
2. Soit H un sous-groupe normal de G. Montrer que G/H est un groupe topologique.

Exercice 2. Soit A un espace topologique. On note ΣA la suspension de A, qui est le quotient

$$\Sigma A = A \times I / \sim$$

où $(a, t) \sim (b, s)$ si et seulement si $(a, t) = (b, s)$ ou $s = t = 0$ ou $s = t = 1$.

1. Montrer que le cône CA et la suspension ΣA sont séparés si A est séparé.
2. Montrer que le cône CA et la suspension ΣA sont compacts si A est compact.
3. Montrer que $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$ et déduire $\Sigma^n S^0 \approx S^n$.

Exercice 3.

1. Montrer qu'on peut obtenir l'espace S^n à partir de S^0 en attachant successivement deux cellules de chaque dimension entre 1 et n.
2. Montrer que $\mathbb{RP}^n$ possède une structure cellulaire avec une seule cellule dans chaque dimension entre 0 et n.

Exercice 4. Soit X un espace et $Sym^2(X)$ le *produit symétrique*, défini comme étant le quotient de $X \times X$ sous l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui échange les facteurs.

1. Identifier $Sym^2(I)$ où $I = [0, 1]$ à homéomorphisme près.
2. Montrer que $Sym^2(S^1)$ est homéomorphe à un ruban de Möbius.

Exercice 5*. On rappelle que $\mathbb{C}P^n$ est le quotient de S^{2n+1}, la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}_n$ définie par l'action du groupe S^1 par multiplication sur les coordonnées. On note $q_n\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ l'application quotient. On note encore $\iota_n\colon S^{2n-1} \hookrightarrow S^{2n+1}$ l'inclusion donnée par $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n, 0)$.

1. Soit D^{2n} la boule unité dans $\mathbb{C}^n$. Montrer que la formule

   $$f(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n, \sqrt{1 - |z_1|^2 - \dots - |z_n|^2})$$

   définit une application $f\colon D^{2n} \to S^{2n+1}$.
2. Montrer que $q_n \circ f$ est surjective.

3. On définit une relation d'équivalence sur D^{2n} en posant $\mathbf{z} \sim \mathbf{z}'$ si et seulement $\mathbf{z} = \mathbf{z}'$ ou $\mathbf{z}\mathcal{R}_{n-1}\mathbf{z}'$ pour des éléments $\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in S^{2n-1}$. Montrer que $q_n \circ f$ passe au quotient (et induit une application g).
4. Montrer que g est un homéomorphisme et que la restriction de $q_n \circ f$ à l'intérieur de D^{2n} est un homéomorphisme.
5. Montrer que la restriction de f au bord S^{2n-1} est l'inclusion ι_n et qu'elle induit une application injective $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$.
6. Conclure que $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \cup_{q_{n-1}} D^{2n}$.