EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Série 2**

Exercice 1. (a) Soit R le rectangle $I \times I$ et $\sim$ la relation d'équivalence définie par $(s,t) \sim (s',t')$ si et seulement si $(s,t) = (s',t')$ ou $s = 0, s' = 1$ et $t = t'$. Montrer que l'espace quotient est un cylindre.

(b) Soit R le rectangle $I \times I$ et $\sim$ la relation d'équivalence définie par $(s,t) \sim (s',t')$ si et seulement si $(s,t) = (s',t')$ ou $s = 0, s' = 1$ et $t = 1 - t'$. Montrer que l'espace quotient est un ruban de Moebius.

Exercice 2. Soit $\sim$ la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si et seulement si $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$. Soit $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ l'application quotient.

1. Montrer que $q^{-1}(q(\mathbf{0}))$ n'est pas compact.
2. Montrer que l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\sim$ est homéomorphe à un quotient de $I \times I$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^2/\sim$ est homéomorphe au tore $S^1 \times S^1$.

Exercice 3. Montrer que S^3 est un groupe topologique en construisant un homéomorphisme vers $SU(2)$, le groupe des matrices unitaires 2×2 de déterminant 1.

Exercice 4. Soit $X = \{-1, 0, 1\}$ et on note X_d cet ensemble muni de la topologie discrète, X_g ce même ensemble muni de la topologie grossière (les seuls ouverts sont $\emptyset$ et X) et X_q muni de la topologie quotient de l'Exercice 4 de la Série 1.

1. Dire quels espaces sont séparés et déterminer les relations de finesse entre ces topologies.
2. Déterminer pour quelles paires (i,j) l'identité sur X détermine une application continue $X_i \to X_j$ pour $i, j \in \{d, g, q\}$.

Exercice 5. Démontrer la proposition suivante du cours :
Proposition : Soit $q : X \to Y$ continue et surjective. Alors q est un quotient si et seulement si pour tout ouvert saturé $U \subset X$, $q(U) \subset Y$ est ouvert.

Exercice 6*. Soit $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}P^1$ le quotient sous l'action de $S^1 \subset \mathbb{C}$. On identifie donc $(z, z') \in S^3$ avec (az, az') pour tout nombre complexe de norme 1, où z, z' sont les coordonnées complexes d'un point de S^3. Soit $q\colon S^3 \to \mathbb{C}P^1$ l'application quotient.

1. Montrer que la préimage de tout point de $\mathbb{C}P^1$ est un cercle dans S^3.
2. Montrer que l'application $(z, z') \mapsto (|z|^2 - |z'|^2, 2z\bar{z}')$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ définit une application $\eta\colon S^3 \to S^2$.
3. Montrer que η est surjective et que la préimage de chaque point est un cercle.
4. Montrer que la préimage de l'équateur $0 \times S^1 \subset S^2$ est un tore.
5. Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est homéomorphe à la sphère S^2.

L'application η est appelée application de Hopf, historiquement importante, car homotopiquement non triviale !