EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
**Série 1**
Topologie II

**Exercice 1.** Montrer que les ouverts de la topologie quotient forment bien une topologie.

**Exercice 2.** Soit $H$ la figure huit dans le plan donnée par deux cercles tangents, en coordonnées

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

On définit une fonction $q\colon [-1, 1] \to H$ par $q(t) = \begin{cases} -1 + e^{2\pi i t} & \text{si} \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1 + e^{2\pi i (t-1/2)} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$.
Montrer que $q$ est un quotient. Est-ce une application ouverte ?

**Exercice 3.** Soit $X = [0, 1]$ et $\sim$ une relation d'équivalence. On demande de décrire ou même seulement de dessiner l'espace quotient dans les cas suivants :

1. $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $\{x, y\} \subset \{0; 1\}$.
2. $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $\{x, y\} \subset \{0; 1/2\}$.
3. $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $\{x, y\} \subset \{0; 1/2, 1\}$.
4. $x \sim y$ si et seulement si $x, y \in X$.

**Exercice 4.** On définit sur $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $\sim$ par $x \sim y$ si et seulement si $x = y = 0$ ou $xy > 0$. Décrire l'espace quotient, sa topologie, ses propriétés de séparation et de compacité.

**Exercice 5.** (a) Soit $D^2$ le disque unité dans $\mathbb{R}^2$ et $A \subset D^2$ le sous-espace

$$A = \{(x, y) \in D^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1/4\}.$$

Établir un homéomorphisme entre $D^2$ et le collapse $D^2/A$. On pourra d'abord traiter le cas $D^1 \subset \mathbb{R}$.

(b) Donner un modèle du cône $CS^1$ comme sous-espace de $\mathbb{R}^3$, ainsi que des formules explicites du quotient $S^1 \times I \to CS^1$, puis de l'homéomorphisme $CS^1 \approx D^2$.

**Exercice 6.** Soit $X = \bigvee_1^\infty S^1$ le wedge d'un nombre dénombrable de copies de cercles et $Y$ les anneaux Hawaïens :

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\}$$

1. Etudier les propriétés de compacité de $X$ et $Y$.
2. Décrire les ouverts de $X$ et de $Y$.
3. Montrer qu'il existe une application (continue) bijective $X \to Y$ qui n'est pas un homéomorphisme.