EPFL – Semestre de Printemps 2024–2025

Topologie II **Série 13**

Exercice 1.
Pour $n \geq 1$, on note $\alpha_n \colon S^1 \to S^1$ l'homéomorphisme donné par $z \longmapsto z^n$, où l'on utilise $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$.

1. Montrer que α_n forme un revêtement et dire à quel sous-groupe de $\pi_1(S^1)$ il correspond, et si c'est un revêtement normal.
2. Identifier le groupe d'automorphismes de revêtement de α_n.

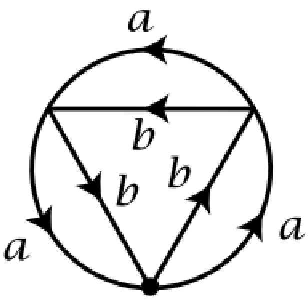
Exercice 2.
Une action (à droite) d'un groupe discret G sur un espace topologique X est dite totalement discontinue si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour tout $g \neq e_G \in G$, $U \cdot g \cap U = \emptyset$.

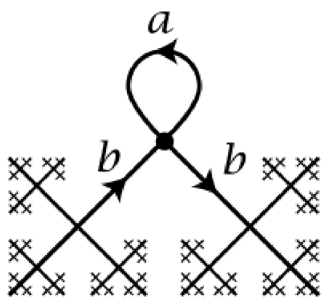
1. Supposons que G est un groupe fini et X séparé. Montrer que l'action de G est totalement discontinue si et seulement si elle est libre.
2. Montrer que si G agit de manière totalement discontinue sur X, alors le quotient $q \colon X \to X/G$ est un revêtement normal.

Exercice 3. Revêtements des tores à g-trous. Soit T_g le tore à g-trous, somme connexe de g tores. On étudie dans cet exercice quelques revêtements de T_g.

1. Montrer que T_3 est un revêtement de T_2 à deux feuillets. On pourra définir une action de C_2 sur T_3 et construire le quotient. Que peut-on dire des groupes fondamentaux ?
2. Décrire un revêtement à trois feuillets de T_2 dont le type d'homotopie est un tore à quatre trous.
3. Plus généralement, pour $m, n \geq 1$, construire une action de C_n sur le tore à $mn+1$ trous de manière à obtenir un revêtement $T_{mn+1} \to T_{m+1}$.

Exercice 4. Voici deux revêtements du bouquet (wedge) de 2 cercles. Le sommet entouré d'un rond noir est le point base.





1. Calculer les sous-groupes de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ correspondants.
2. Dire pour chacun s'il est normal.