EPFL – Semestre de Printemps 2024–2025
Topologie II **Série 12**

Exercice 1.
Trouver les revêtements universels des espaces suivants.

1. Le cercle S^1
2. Le bouquet de deux cercles $S^1 \vee S^1$
3. Le tore $S^1 \times S^1$
4. Les espaces projectifs réels $\mathbb{RP}^n$

Exercice 2.
Soient X, Y, Z des espaces topologiques.

1. Supposons qu'on a des applications $X \to Y \to Z$ telles que $Y \to Z$ et $X \to Z$ sont des revêtements. Montrer que si Z est localement connexe par arcs, $X \to Y$ est un revêtement.
2. Soit X comme dans le théorème 5.7 du cours. Pour deux sous-groupes $H_1 \leq H_2 \leq \pi_1(X)$, montrer qu'on a un revêtement $X_{H_1} \to X_{H_2}$ (avec les notations du corollaire 5.8).

Exercice 3. Trouver tous les revêtements connexes à 2 et 3 feuillets de $S^1 \vee S^1$, à isomorphismes (non pointés) de revêtements près.

Exercice 4.
Soit $p\colon \tilde{X} \to X$ un revêtement simplement connexe de X et $A \subset X$ un sous-espace connexe par arcs, localement connexe par arcs avec $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ une composante connexe de $p^{-1}(A)$ Montrer que $p\colon \tilde{A} \to A$ est un revêtement correspondant au noyau de $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$.

Exercice 5. On rappelle que la caractéristique d'Euler d'un graphe connexe G est $\chi(G) = \#\text{sommets} - \#\text{arêtes}$.

1. Montrer que tout revêtement M à fibre finies d'un graphe fini connexe G est encore un graphe fini, tel que $\chi(M) = k\chi(G)$
2. Soit L un groupe libre à $n \geq 1$ générateurs et H un sous-groupe d'indice k de L. Montrer que H est encore un sous-groupe libre, dont on donnera le nombre de générateurs.
3. Soit $n \geq 3$. Montrer que le groupe libre à 2 générateurs admet un sous-groupe isomorphe au sous-groupe libre à n générateurs. Spécifier des générateurs pour $n = 3$.

+ petite question : dans la feuille de la semaine dernière, on donnait un exemple d'espace n'admettant pas de revêtement simplement connexe. Avez-vous compris pourquoi le théorème 5.7 ne s'applique pas à cet espace ?