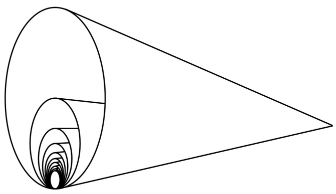
EPFL – Semestre de Printemps 2024–2025
Topologie II **Série 11**

Exercice 1.
On rappelle qu'un espace topologique X est localement simplement connexe si il admet une base de voisinages simplement connexes. De plus X est semi-localement simplement connexe si chaque point $x \in X$ admet un voisinage V tel que l'application induite de l'inclusion $\pi_1(V) \to \pi_1(X)$ est triviale.

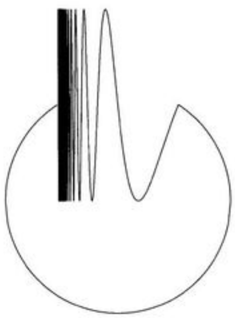
1. Montrer que la boucle d'oreille hawaïenne comme sous-espace de $\mathbb{R}^2$ n'est pas semi-localement simplement connexe.
2. Montrer que le cône de la boucle d'oreille hawaïenne est semi-localement simplement connexe, mais qu'il n'est pas localement simplement connexe.



Notons qu'un cône est toujours contractile, en particulier simplement connexe.

Exercice 2.
Soit X le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ consistant en l'union du bord du carré $\partial([0,1] \times [0,1])$ avec les segments verticaux $x = 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ dans le carré. Montrer que pour tout revêtement $P \to X$ il existe un voisinage du côté gauche du carré qui se relève de manière homéomorphe dans P. Déduire que X n'admet pas de revêtement simplement connexe.

Exercice 3. Soit Y le quasi-cercle ci-dessous, un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^2$ consistant en une portion du graphe $y = sin(\frac{1}{x})$, le segment $[-1, 1]$ de l'axe des ordonnées et un arc connectant les deux.



On peut former un quotient $f \colon Y \to S^1$ avec $S^1 \approx Y/A$, où $A = [-1, 1]$.
Montrer que f ne se relève pas au revêtement $\mathbb{R} \to S^1$, même si $\pi_1(Y) = 0$.
Cela montre la nécessité de l'hypothèse de local connexité par arcs pour le critère de relèvement.

Exercice 4. Montrer que si un espace X localement connexe par arcs, connexe par arcs tel que $\pi_1(X)$ est fini, alors tout application $X \to S^1$ induit l'application triviale en homotopie.

Indication : utiliser le revêtement $\mathbb{R} \to S^1$.

Exercice 5. Soient a et b les générateurs canoniques de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ (c'est à dire correspondant à chacune des copies de S^1).

1. Dessiner un revêtement de $S^1 \vee S^1$ correspondant au sous-groupe normal engendré par $a^2, b^2, (ab)^4$.
2. * Le démontrer.