EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Série 10**

Exercice 1. Revêtements du huit.
On appelle un graphe $2-$orienté si c'est un graphe orienté tel que chacun de ses sommets est adjacent à quatre extremités d'arêtes, deux entrantes et deux sortantes, et dont les arêtes sont labellées a ou b, de telle sorte que chaque sommet est adjacent à exactement une extrémité entrante et une extrêmité sortante d'une arête labellée a (et par conséquent de même pour b).

1. Montrer que tout graphe $2-$orienté forme un revêtement de $S^1 \vee S^1$.
2. Montrer que tout graphe fini (i.e. ayant un nombre fini de sommets) tel que chacun de ses sommets est adjacent à quatre extremités d'arêtes peut être orienté et labellé de façon a former un graphe $2-$orienté.

Exercice 2. Noeuds toriques*.
Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible et $K(p, q)$ le noeud torique de type (p, q) défini par l'image de la droite $y = \frac{p}{q}x$ dans le quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$ (l'action de $\mathbb{Z}^2$ est par translation). On identifiera cet espace quotient via un homéomorphisme à un tore T dans $\mathbb{R}^3$ obtenu comme surface de révolution autour de l'axe Oz d'un cercle unité du plan Oxz, centré en $(2; 0; 0)$. Ce tore T est le bord d'un tore plein P obtenu de manière analogue par révolution d'un disque.

1. Montrer que $K(p, q)$ définit bien un noeud, c'est-à-dire un lacet dans $\mathbb{R}^3$ sans intersection (un plongement de S^1 dans $\mathbb{R}^3$).
2. Les projections $(x, \frac{p}{q}x) \mapsto (x, 0)$ et $(x, \frac{p}{q}x) \mapsto (0, \frac{p}{q}x)$ sur les axes définissent dans le quotient T^2 des applications $K(p, q) \to S^1$ (pour les deux cercles équateur et méridien). Calculer les homomorphismes $\pi_1 K(p, q) \to \pi_1 S^1$ induits.
3. Soient $A = \mathbb{R}^3 \setminus P$ et B un ouvert contenant $P \setminus K(p, q)$ comme rétracte de déformation fort. Identifier les groupes fondamentaux de ces espaces.
4. Montrer que $A \cap B$ a le type d'homotopie d'un cercle. On pourra se ramener à l'étude de $T \setminus K(p, q)$ et identifier dans $\mathbb{R}^2$ un domaine homéomorphe à un carré dont le quotient est cet espace.
5. Calculer $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K(p, q)$.

Exercice 3.
Construire un espace topologique dont le groupe fondamental est cyclique d'ordre n.

Exercice 4. Revêtement de la bouteille de Klein
Soit $q\colon I \times I \to K$ le quotient usuel définissant la bouteille de Klein (i.e. $(s, 0) \sim (s, 1)$ et $(0, t) \sim (1, 1-t)$ pour tous $0 \leq s, t \leq 1$). On définit une fonction $P\colon I \times I \to I \times I$ par $P(s, t) = (2s, t)$ pour $0 \leq s \leq 1/2$ et $P(s, t) = (2s - 1, 1 - t)$ pour $1/2 < s \leq 1$.

1. Montrer que $q \circ P$ est continue, qu'elle passe au quotient et définit une application $p\colon T^2 \to K$ du tore vers la bouteille de Klein.
2. Montrer que p est un revêtement à deux feuillets de K.
3. Identifier $p_*\colon \pi_1 T^2 \to \pi_1 K$.

4. Conclure que le groupe de Klein contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 5. Composition de revêtements. Soit H les anneaux hawaïens. On appelle c_n le sous-espace formé du cercle de rayon $1/n$ et de centre $(0;1/n)$, le point d'accumulation est $(0;0)$.

1. Construire pour tout entier $k \geq 1$ un revêtement à deux feuillets de H de sorte que la préimage du cercle c_i soit une réunion disjointe de deux cercles isométriques à c_i, l'un de centre $(0;1/n)$, l'autre de centre $(0;3-1/n)$, lorsque $i > k$, mais une ellipse dont le grand axe est le segment vertical d'extrêmités $(0;0)$ et $(0;3)$ pour $i \leq k$.
2. Construire un revêtement à une infinité de feuillets de H. On fera en sorte que la préimage du cercle c_i soit une réunion disjointe d'une infinité de cercles isométriques pour tout $i \geq 2$.
3. Construire à l'aide de la partie 1 un revêtement à deux feuillets de l'espace construit dans la partie 2 de sorte que la composition des deux revêtements ne soit pas un revêtement.