EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Série 0
Topologie II

On utilise * pour signifier qu'un exercice est plus difficile que les autres.

Exercice 1. Montrer qu'un espace topologique est séparé si et seulement si la diagonale Δ est fermé dans $X \times X$.

Exercice 2. Démontrer la Proposition 2.5 du cours : montrer qu'une application bijective d'un espace compact vers un espace séparé est un homéomorphisme.

Exercice 3. Montrer que si X est un espace séparé qui contient deux compacts K_1 et K_2 tels que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ alors il existe des ouverts U_1 et U_2 tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ et $K_i \subseteq U_i$ pour $i = 1, 2$.

Exercice 4*. Si A est un sous-espace d'un espace topologique X, il existe au maximum 14 sous-espaces de X que l'ont peut obtenir à partir de A avec les opérations "prendre le complémentaire" et "prendre l'adhérence". Vous pouvez (au choix) :

1. Essayer de trouver un exemple maximal (ou presque) d'un tel sous-espace A, au sens il existe 14 (ou presque) sous-ensembles distincts que l'on peut obtenir avec le complémentaire et l'adhérence.
2. Essayer de démontrer ce résultat. Pour cela, vous pouvez considérer les opérations obtenues à partir des deux opérations "adhérence" (noté a) et "complémentaire" (noté c) comme des mots avec les lettres a et c. Par exemple, on écrit cac pour signifier l'opération "prendre le complémentaire de l'adhérence du complémentaire". Ensuite, considérez les relations, comme en théorie des groupes. Par exemple, notez que $ccA = A$. Il pourra être utile de considérer l'opération i "intérieur", en notant que $cacA = iA$.

Remarque : ces deux opérations ne commutent pas et n'engendrent pas un groupe, mais un monoïde, puisque l'opération d'adhérence ne possède pas d'inverse.