

**Exercice 1. Revêtements du huit.**

On appelle un graphe 2–orienté si c'est un graphe orienté tel que chacun de ses sommets est adjacent à quatre extrémités d'arêtes, deux entrantes et deux sortantes, et dont les arêtes sont labellées  $a$  ou  $b$ , de telle sorte que chaque sommet est adjacent à exactement une extrémité entrante et une extrémité sortante d'une arête labellée  $a$  (et par conséquent de même pour  $b$ ).

1. Montrer que tout graphe 2–orienté forme un revêtement de  $S^1 \vee S^1$ .
2. Montrer que tout graphe fini (i.e. ayant un nombre fini de sommets) tel que chacun de ses sommets est adjacent à quatre extrémités d'arêtes peut être orienté et labellisé de façon à former un graphe 2–orienté.

**Solution 1.**

1. On donne d'abord une orientation et un label aux deux copies de  $S^1$  dans  $S^1 \vee S^1$  de manière à former un graphe 2–orienté. Étant donné un graphe 2–orienté  $\Gamma$  on construit une application  $p: \Gamma \rightarrow S^1 \vee S^1$  qui est un homéomorphisme préservant l'orientation sur l'intérieur des arêtes, envoyant une arête labellisée  $a$  (resp.  $b$ ) sur l'arête labellisée  $a$  (resp.  $b$ ). Le fait qu'une telle application existe suit de la définition d'un graphe 2–orienté et il n'est pas difficile de vérifier la condition de revêtement.
2. Tout graphe connexe et fini avec un nombre pair d'arêtes à chaque sommets possède un circuit eulérien, c'est à dire un lacet traversant chacune arête exactement une fois. Prenons  $\Gamma$  comme dans l'énoncé. On peut labeller les arêtes d'un circuit eulérien alternativement par  $a$  et  $b$ , et comme il y a quatre extrémités d'arêtes adjacentes à un sommet, on est obligé d'avoir deux  $a$  et deux  $b$  au niveau de chaque sommet. On peut ensuite choisir une orientation appropriée.

**Exercice 2. Nœuds toriques\*.**

Soit  $\frac{p}{q}$  une fraction irréductible et  $K(p, q)$  le noeud torique de type  $(p, q)$  défini par l'image de la droite  $y = \frac{p}{q}x$  dans le quotient  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = T^2$  (l'action de  $\mathbb{Z}^2$  est par translation). On identifiera cet espace quotient via un homéomorphisme à un tore  $T$  dans  $\mathbb{R}^3$  obtenu comme surface de révolution autour de l'axe  $Oz$  d'un cercle unité du plan  $Oxz$ , centré en  $(2; 0; 0)$ . Ce tore  $T$  est le bord d'un tore plein  $P$  obtenu de manière analogue par révolution d'un disque.

1. Montrer que  $K(p, q)$  définit bien un noeud, c'est-à-dire un lacet dans  $\mathbb{R}^3$  sans intersection (un plongement de  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ ).
2. Les projections  $(x, \frac{p}{q}x) \mapsto (x, 0)$  et  $(x, \frac{p}{q}x) \mapsto (0, \frac{p}{q}x)$  sur les axes définissent dans le quotient  $T^2$  des applications  $K(p, q) \rightarrow S^1$  (pour les deux cercles équateur et méridien). Calculer les homomorphismes  $\pi_1 K(p, q) \rightarrow \pi_1 S^1$  induits.
3. Soient  $A = \mathbb{R}^3 \setminus P$  et  $B$  un ouvert contenant  $P \setminus K(p, q)$  comme rétracte de déformation forte. Identifier les groupes fondamentaux de ces espaces.
4. Montrer que  $A \cap B$  a le type d'homotopie d'un cercle. On pourra se ramener à l'étude de  $T \setminus K(p, q)$  et identifier dans  $\mathbb{R}^2$  un domaine homéomorphe à un carré dont le quotient est cet espace.
5. Calculer  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K(p, q))$ .

## Solution 2.

1. On peut dessiner le réseau de  $\mathbb{Z}^2$  dans le plan, de telle sorte que toute l'information du noeud  $K(p, q)$  se trouve dans le segment d'extrémités  $(0, 0)$  et  $(q, p)$ , qui représentent le même point du tore. Ainsi la droite associée à  $K(p, q)$  est ramenée au segment  $(0, 0)$ - $(q, p)$ , qui lui-même est ramené à un lacet sur le tore. Pour voir que ce lacet n'a pas de point d'intersection avec lui-même, on remarque que les seuls points identifiés sur le segment  $(0, 0)$ - $(q, p)$  sont les extrémités : comme  $p$  et  $q$  sont premiers eux ce segment ne passe par aucun autre point de  $\mathbb{Z}^2$  et le même raisonnement reste valide par translation.
2. Le noeud torique parcourt le tore d'une manière particulière, qui peut être étudiée en observant son comportement sur chacun des deux cercles définissant le tore. Cela se fait par les projections. On remarque que  $p$  représente le nombre de tours qu'il effectue sur un cercle, et  $q$  représente le nombre de tours qu'il effectue sur l'autre cercle. Le générateur  $[\omega]$  du groupe  $\pi_1(K(p, q))$  est la classe du lacet qui parcourt une fois l'espace  $K(p, q)$ . Il est envoyé par la première projection sur le lacet qui fait  $q$  fois le tour du méridien correspondant, dont on note le générateur  $[a]$ . Cette projection induit une multiplication par  $q$  entre les groupes fondamentaux, puisque l'homomorphisme de groupes  $\pi_1(K(p, q)) \rightarrow \pi_1(S^1) : [\omega] \mapsto [a]^q$  se traduit dans les entiers relatifs par  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : n \mapsto qn = n + \dots + n$  (notez le passage aux notations additives). Il en va de même pour l'autre projection, qui induit donc une multiplication par  $p$ .
3. L'espace  $A$  a le même type d'homotopie que  $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$  de la dernière série. On a montré que son groupe fondamental était isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Ainsi,  $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$ . Pour la suite des calculs on rappelle qu'un générateur de ce groupe est donné par exemple par un lacet constitué d'un cercle de centre  $(2; 0; 0)$  et de rayon  $11/10$ , basé en  $(9/10; 0; 0)$ . Beaucoup d'autres choix conviennent à condition de choisir un lacet qui fait une fois le tour du tore plein, dans la direction des méridiens.

Ensuite, on construit  $B$  qui doit nécessairement contenir  $P \setminus K(p, q)$  pour recouvrir l'espace considéré. Comme  $B$  doit être ouvert on “épaissit” le tore plein pour former le tore plein ouvert  $B'$  obtenu par révolution d'un disque ouvert de rayon  $12/10$  (par exemple). On retire de ce tore plein le noeud torique et tout le “sillon” correspondant jusqu'à la surface de ce tore ouvert. Plus concrètement, pour tout point  $x$  du noeud, on considère le point  $y$  du cercle  $\Gamma$  centré en l'origine et de rayon 2 le plus proche (i.e. le centre du disque de révolution correspondant à la tranche sur laquelle se trouve  $x$ ) et la droite  $d$  passant par  $x$  et  $y$ . On définit  $B$  en enlevant à  $B'$  le segment semi-ouvert de longueur  $2/10$ , contenu dans  $d$ , fermé en  $x$  et ouvert en son autre extrémité qui repose sur la surface de  $B'$ .

Montrons que  $B$  a le même type d'homotopie que l'âme  $\Gamma$  du tore et il s'ensuit que  $\pi_1(B) \cong \mathbb{Z}$  également. Comme  $B$  a pour rétract de déformation fort (c-a-d rétract induisant un isomorphisme de groupe fondamental)  $P \setminus K(p, q)$ , ils ont le même groupe fondamental. De plus,  $P \setminus K(p, q)$  se rétracte fortement sur l'âme du tore (comme d'habitude, on se représente le tore par le carré  $I \times I$  avec identifications, pour expliciter l'homotopie comme l'application qui rétracte le tout sur le segment  $(0, 1/2) - (1, 1/2)$  dans le carré identifié). A nouveau on choisit un générateur explicite de ce groupe fondamental. On pourrait choisir l'âme du tore, mais pour avoir des points de base compatibles, on choisira plutôt par exemple lacet basé en  $(9/10; 0; 0)$ , par exemple en commençant par un chemin  $\gamma$  de rectiligne de  $(9/10; 0; 0)$  à  $(2; 0; 0)$ , puis en parcourant l'âme du tore, et enfin en revenant par  $\bar{\gamma}$ .

4. On commence par calculer le saturé  $q^{-1}(q(\Gamma))$  où  $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$  est l'application quotient et  $\Gamma$  est le graphe de la droite de pente  $p/q$ . On peut calculer quels points du lattice

se trouvent sur cette droite : les points de croisement avec les droites horizontales doivent être de la forme  $(a; n)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ , i.e.  $n = pa/q$  ou encore  $a = qn/p$ . La plus petite partie entière d'un tel nombre rationnel vaut  $1/p$  par Bézout si bien que le saturé de  $\Gamma$  est composé d'une infinité de droites parallèles à  $\Gamma$ , horizontalement espacées de  $1/p$  (et verticalement de  $1/q$ ).

On considère la bande ouverte du plan comprise entre la droite  $y = p/qx$  et  $y = p/qx - 1/q$ . Tout point du tore a une préimage dans la clôture de cette bande puisque le plan tout entier s'obtient par translations entières de cette bande. De plus, le segment horizontal compris entre  $(0; 0)$  et  $(1/p; 0)$  est identifié par  $q$  au segment compris entre  $(p; q)$  et  $(p+1/p; q)$ . Un *domaine fondamental* de  $T \setminus K(p, q)$  est donc donné par la partie de la bande ouverte contenue entre ces deux segments (y compris). L'application quotient identifie uniquement ces segments si bien que  $T \setminus K(p, q)$  est homéomorphe à un cylindre ouvert  $S^1 \times ]0; 1[$ .

On remarque que  $A \cap B$  se rétracte fortement sur  $T^+ \setminus K(p, q)^+$ , où  $T^+$  est le tore obtenu par révolution d'un cercle de rayon  $11/10$  et  $K^+$  est le noeud torique correspondant (ce rétracte correspond au milieu de la partie ouverte que nous avons ajouté à  $T \setminus K(p, q)$  pour construire  $B$ . Ainsi,  $A \cap B$  a le même type d'homotopie que  $T \setminus K(p, q)$ , qui est celui d'un cercle. On choisira comme générateur de son groupe fondamental, isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , l'image par  $q$  de la droite d'équation  $y = p/qx - 1/2q$ , le lacet  $\omega$  situé au milieu de la bande ouverte décrite ci-dessus et qui parcourt sur la surface du tore un noeud torique isométrique à  $K(p, q)$ . Plus précisément on doit prendre la version  $\omega^+$  de ce lacet pour qu'il se trouve bien dans  $A \cap B$ , à un dixième de distance au-dessus de la surface du tore. Quitte à mieux choisir l'homéomorphisme entre  $T^2$  et le tore  $T$  on peut s'arranger pour que ce lacet passe par  $(9/10; 0; 0)$  qu'on choisira comme point de base de  $A \cap B$ .

5. On applique le théorème de Seifert Van Kampen aux ouverts  $A$  et  $B$ , en remarquant que les conditions du théorème sont bien vérifiées (on a deux ouverts recouvrant l'espace  $\mathbb{R}^3 \setminus K(p, q)$ , ayant une intersection connexe par arcs). On remarque que les homomorphismes de groupes induits par les inclusions  $A \cap B \rightarrow A$  et  $A \cap B \rightarrow B$  sont identiques aux homomorphismes de groupes induits par les projections du point 2. Illustrativement, on a une équivalence entre les diagrammes d'homomorphismes de groupes suivants (avec  $Z$  l'amalgame correspondant)

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A \cap B) & \xrightarrow{(\iota_A)_*} & \pi_1(A) \\ (\iota_B)_* \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(B) & \longrightarrow & \pi_1 Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1 K(p, q) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \pi_1(S^1) \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(S^1) & \longrightarrow & \pi_1 Z \end{array}$$

Ainsi,  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K(p, q)) \cong \pi_1(S^1) *_{\pi_1(K(p, q))} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$  où le produit est amalgamé par rapport aux homomorphismes induits par les projections du point 2. On conclut par la partie 2 que le groupe fondamental de  $\mathbb{R}^3 \setminus K(p, q)$  admet une présentation donnée par  $\langle a, b | a^q b^{-p} \rangle$ .

### Exercice 3.

Construire un espace topologique dont le groupe fondamental est cyclique d'ordre  $n$ .

**Solution 3.** Il suffit de considérer un polygone à  $n$  côtés avec l'identification  $a * a \cdots * a$   $n$  fois.

### Exercice 4. Revêtement de la bouteille de Klein

Soit  $q: I \times I \rightarrow K$  le quotient usuel définissant la bouteille de Klein (i.e.  $(s, 0) \sim (s, 1)$  et  $(0, t) \sim (1, 1-t)$  pour tous  $0 \leq s, t \leq 1$ ). On définit une fonction  $P: I \times I \rightarrow I \times I$  par  $P(s, t) = (2s, t)$  pour  $0 \leq s \leq 1/2$  et  $P(s, t) = (2s - 1, 1-t)$  pour  $1/2 < s \leq 1$ .

1. Montrer que  $q \circ P$  est continue, qu'elle passe au quotient et définit une application  $p: T^2 \rightarrow K$  du tore vers la bouteille de Klein.
2. Montrer que  $p$  est un revêtement à deux feuillets de  $K$ .
3. Identifier  $p_*: \pi_1 T^2 \rightarrow \pi_1 K$ .
4. Conclure que le groupe de Klein contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ .

#### Solution 4.

1. On note  $\sim_K$  la relation d'équivalence sur  $I \times I$  engendrée par les relations  $(s, 0) \sim_K (s, 1)$  et  $(0, t) \sim_K (1, 1-t)$ , et  $\sim_T$  la relation d'équivalence engendrée par les relations  $(s, 0) \sim_T (s, 1)$  et  $(0, t) \sim_T (1, t)$ . On alors des homéomorphismes  $K \approx I \times I / \sim_K$  et  $T^2 \approx I \times I / \sim_T$ . On note  $q_T, q_K$  les composées  $I \times I \rightarrow I \times I / \sim_T \approx T^2$  et  $I \times I \rightarrow I \times I / \sim_K \approx K$ .

Montrons que la composée  $q_K \circ P: I \times I \rightarrow K$  est continue. Il est clair que  $P$  est continue sur  $I \times I$  privé de  $\{\frac{1}{2}\} \times I$ . Quand  $s \uparrow \frac{1}{2}$ , on a  $P(s, t) \rightarrow (1, t)$  alors que quand  $s \downarrow \frac{1}{2}$  on trouve  $P(s, t) \rightarrow (0, 1-t)$ . Comme  $(1, t) \sim_K (0, 1-t)$  pour tout  $t$ , on conclut que  $q_K \circ P$  est continue.

Vérifions maintenant que  $q_K \circ P$  passe au quotient par  $\sim_T$ . Pour tout  $t$ , on trouve  $P(0, t) = (0, t)$  et  $P(1, t) = (1, 1-t)$  de sorte que  $P(0, t) \sim_T P(1, t)$ . De même, on vérifie que  $P(s, 0) \sim_T P(s, 1)$  pour tout  $s$ . La propriété universelle du quotient assure donc l'existence d'une unique application  $p: T^2 \rightarrow K$  faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{P} & I \times I \\ q_T \downarrow & \searrow & \downarrow q_K \\ T^2 & \xrightarrow{p} & K \end{array} .$$

Attention au fait que  $P$  n'est *pas* continue.

2. Soit  $\sigma: T^2 \rightarrow T^2$  définie par

$$(s, t)_T \mapsto \begin{cases} (s + \frac{1}{2}, 1-t)_T & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (s - \frac{1}{2}, 1-t)_T & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre que  $\sigma$  est bien définie et continue, et on vérifie que  $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{T^2}$  de sorte que  $\sigma$  est un homéomorphisme. On obtient une action de  $C_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $T^2$  qui est propre et libre. Le quotient  $T^2 \rightarrow T^2/C_2$  est donc un revêtement à 2 feuillets.

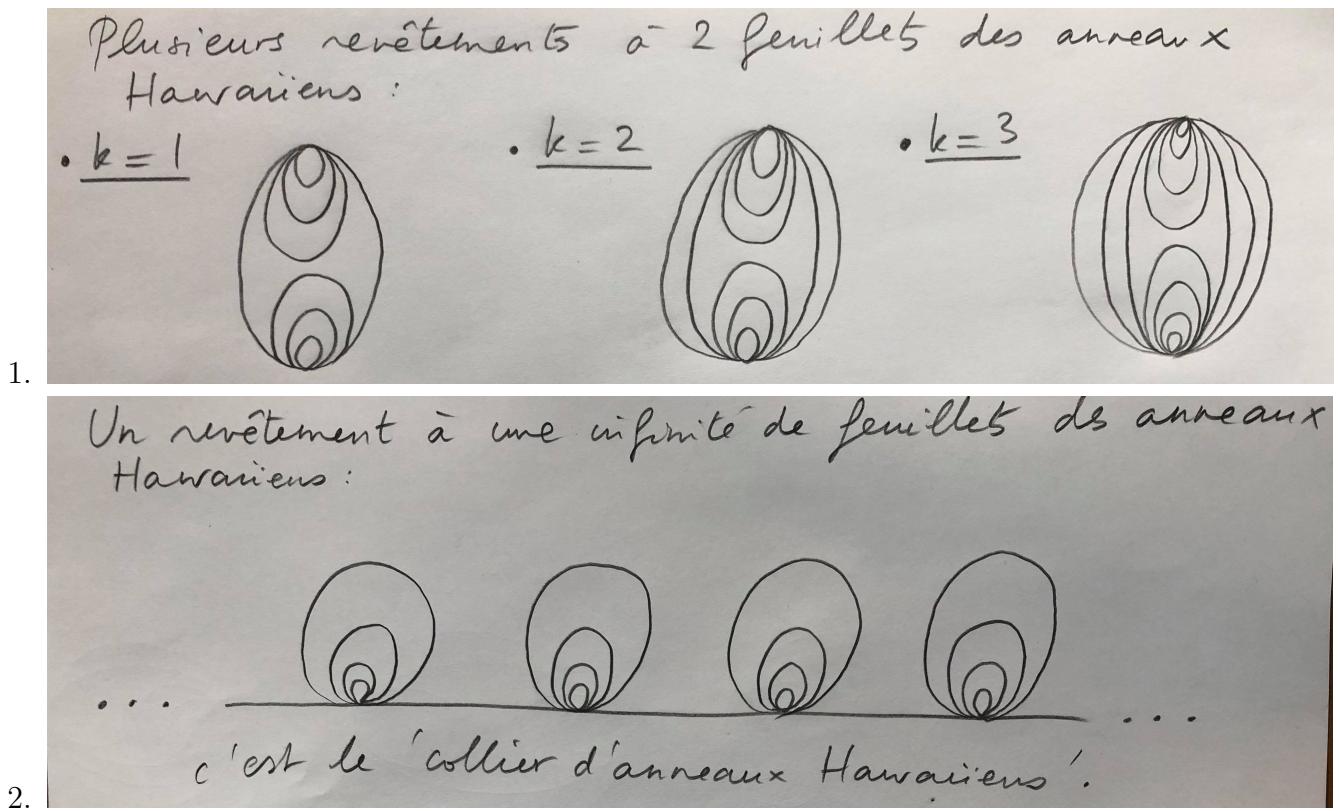
Montrons que le quotient  $T^2 \rightarrow T^2/C_2$  s'identifie à  $p$ . Tout d'abord, on identifie le quotient  $T^2/C_2$ . Les orbites sous l'action de  $C_2$  sont les paires  $(s, t)_T, (s + \frac{1}{2}, 1-t)_T$  pour  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ . Le rectangle  $q_T([0, \frac{1}{2}] \times I) \subset T^2$  est un domaine fondamental pour l'action de  $C_2$  : l'action est triviale sur l'intérieur du rectangle. Sur le bord du rectangle, on a les identifications  $(0, t)_T \sim (\frac{1}{2}, 1-t)_T$  et  $(s, 0)_T \sim (s, 1)_T$ . On obtient  $T^2/C_2 \approx [0, \frac{1}{2}] \times I / \sim$ . En composant avec une dilatation  $(s, t)_T \mapsto (2s, t)_T$  on obtient  $T^2/C_2 \approx I \times I / \sim \approx K$ . De plus, on vérifie explicitement que la composée  $T^2 \rightarrow T^2/C_2 \xrightarrow{\cong} K$  est l'application  $p$ . Finalement,  $p$  est un revêtement à deux feuillets de  $K$ .

- On choisit comme générateurs de  $\pi_1 T^2$  les lacets  $a : t \mapsto (0, t)_T$  et  $b : t \mapsto (t, 0)_T$ , et pour  $\pi_1 K$  les générateurs  $\alpha : t \mapsto (0, t)_K$  et  $\beta : t \mapsto (t, 0)_K$ . On a donc les présentations  $\pi_1 T \cong \mathbb{Z}^2$  et  $\pi_1 K = \langle \alpha, \beta \mid \alpha\beta\alpha\beta^{-1} \rangle$ . Alors les lacets  $p \circ a$  et  $p \circ b$  sont respectivement égaux à  $\alpha$  et  $\beta * \beta$  où  $*$  est la concaténation des lacets. Le morphisme induit  $p_* : \pi_1 T^2 \rightarrow \pi_1 K$  est donné par  $a \mapsto \alpha$ ,  $b \mapsto \beta^2$ .
- Comme  $p$  est un revêtement, il induit une injection  $p_* : \pi_1 T^2 \hookrightarrow \pi_1 K$  sur les groupes fondamentaux. On en déduit que  $\pi_1 K$  contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ . On peut aussi vérifier que  $\alpha$  et  $\beta^2$  commutent dans  $\pi_1 K$ , et donc que le sous-groupe de  $\pi_1 K$  qu'ils engendrent est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ .

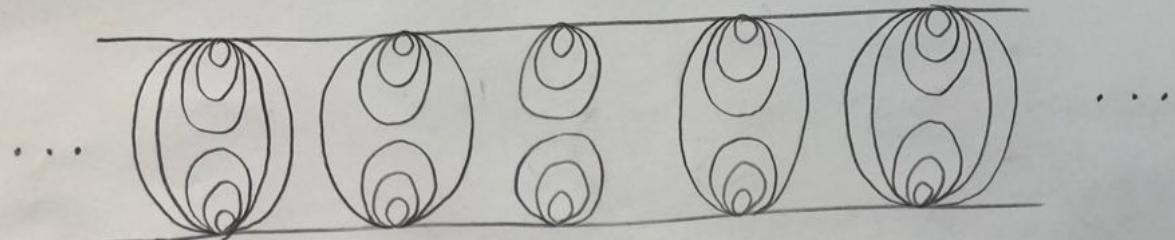
**Exercice 5. Composition de revêtements.** Soit  $H$  les anneaux hawaïens. On appelle  $c_n$  le sous-espace formé du cercle de rayon  $1/n$  et de centre  $(0; 1/n)$ , le point d'accumulation est  $(0; 0)$ .

- Construire pour tout entier  $k \geq 1$  un revêtement à deux feuillets de  $H$  de sorte que la préimage du cercle  $c_i$  soit une réunion disjointe de deux cercles isométriques à  $c_i$ , l'un de centre  $(0; 1/n)$ , l'autre de centre  $(0; 3 - 1/n)$ , lorsque  $i > k$ , mais une ellipse dont le grand axe est le segment vertical d'extrémités  $(0; 0)$  et  $(0; 3)$  pour  $i \leq k$ .
- Construire un revêtement à une infinité de feuillets de  $H$ . On fera en sorte que la préimage du cercle  $c_i$  soit une réunion disjointe d'une infinité de cercles isométriques pour tout  $i \geq 2$ .
- Construire à l'aide de la partie 1 un revêtement à deux feuillets de l'espace construit dans la partie 2 de sorte que la composition des deux revêtements ne soit pas un revêtement.

**Solution 5★.**



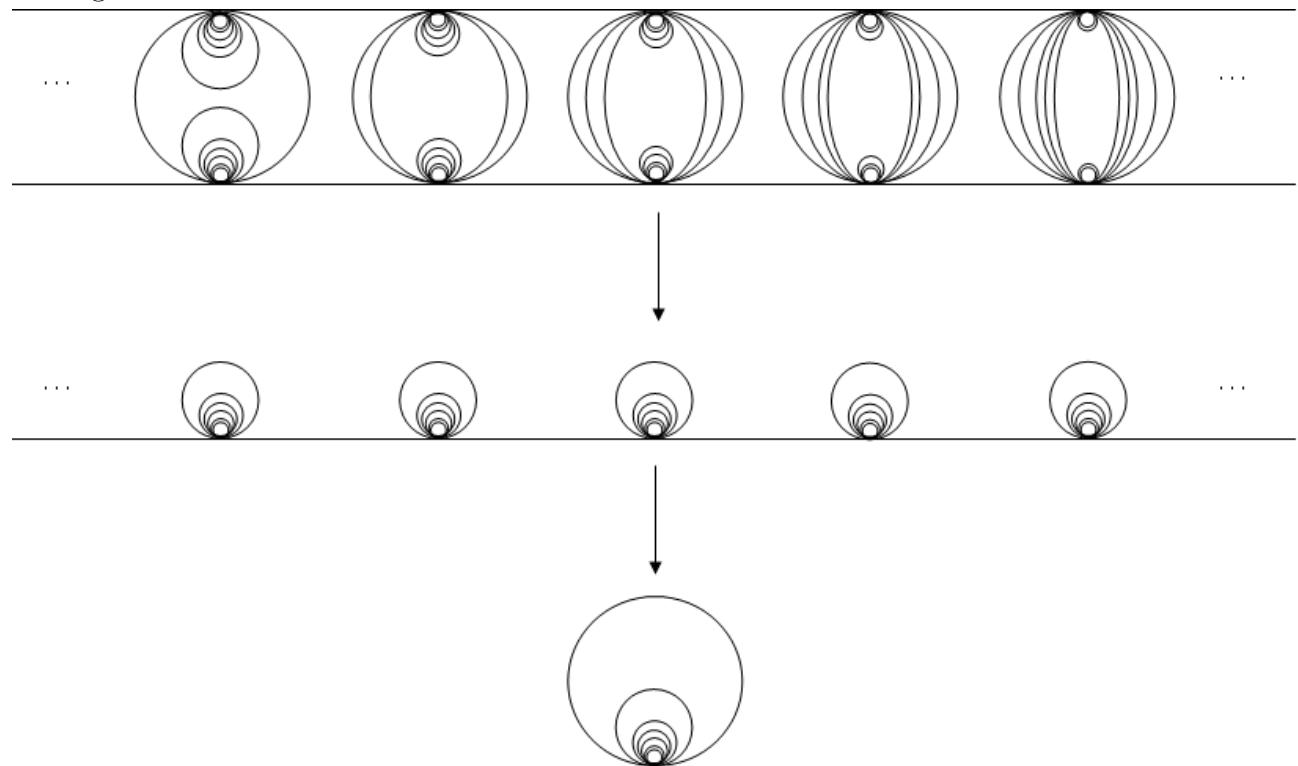
Un revêtement à 2 feuilles du collier d'anneaux Hawaïens :



mais la composée n'est pas un revêtement des anneaux Hawaïens !!

3.

L'image suivante résume la situation :



(source : <https://math.stackexchange.com/questions/989083/is-composition-of-covering-maps-covering-map>)

La composition n'est pas un revêtement car tout voisinage ouvert de  $(0; 0)$  contient une infinité de  $c_i$  et la préimage par la composition ne peut être un homéomorphisme pour les feuilles correspondantes aux anneaux hawaïens situées sur la droite réelle loin de 0.