EPFL - Semestre de Printemps 2023-2024	Jérôme Scherer
Topologie MATH-225	**Examen final**
MATHÉMATIQUES	le 17 juin 2024
Durée : 180 minutes	Nombre de points : 63

Nom		Prénom	
Signature		Sciper	

Nous demandons à chaque exercice des justifications et des explications claires et précises. Il est permis de citer un résultat du cours ou l'un des exercices théoriques des séries à condition que le sujet du problème d'examen ne soit pas justement le contenu de ce résultat ou exercice, et que l'énoncé du résultat soit donné explicitement et complètement.

Les pages 15 et 16 sont à disposition pour terminer un exercice si nécessaire, mais en général la place prévue devrait suffire.

Espace réservé pour la correction.

Ex. 1 (8 pts)		Ex. 2 (10 pts)		Ex. 3 (9 pts)	
Ex. 4 (8 pts)		Ex. 5 (12 pts)		Ex. 6 (16 pts)	
Total (63 pts)		**Note**			

Question 1. Un collapse du plan. (8 points) On considère $Y = \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ et les sous-espaces $\partial I^2 \subset I^2$, où $I = [0;1]$ est l'intervalle unité. On s'intéresse aux quotients $A = I^2/\partial I^2$ et $B = \mathbb{R}^2/Y$ obtenus en collapsant les sous-espaces respectifs.

(a) (3 points) Etablir un homéomorphisme $A \approx S^2$. On ne demande pas de formules explicites, mais des explications claires et précises qui expliquent comment une application $A \to S^2$ est construite et pourquoi c'est un homéomorphisme.

(b) (1 points) Montrer que l'inclusion $I^2 \subset \mathbb{R}^2$ induit une application $A \to B$. Est-ce un homéomorphisme ? Expliquer pourquoi.

(c) (4 points) Construire un homéomorphisme entre B et un wedge de sphères (et prouver que c'est un homéormorphisme). Combien de sphères y a-t-il ?

(a) Pour construire $A \to S^2$, on définit une application

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[r] \arrow[d] & S^2 \\ I^2/\partial I^2 \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

qui passe au quotient, elle doit donc envoyer le bord ∂I^2 sur le pt de base, disons le pôle Sud $(0;0;-1)$.

On commence par un homéo relatif $(I^2, \partial I^2) \approx (D^2, S^1)$ puis on définit sur D^2 une application par morceaux.

Sur le disque intérieur de rayon $\frac{1}{2}$, on dilate, puis on "gonfle" sur l'hémisphère nord $B(0;\frac{1}{2}) \xrightarrow{\cdot 2} D^2 \longrightarrow S^2$

$(x,y) \longmapsto (x,y,\sqrt{1-(x^2+y^2)})$

Sur le reste , on envoie les points sur l'hémisphère sud, S^2 sur $(0;0;-1)$ en coordonnées polaires $(r,\theta) \mapsto (1-r,\theta)$

Cette application est bijective

c'est un homéo d'un compact vers un Hausdorff.

(b) On a un diagramme d'inclusions

$$\begin{tikzcd} \partial I^2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ I^2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{R}^2 \arrow[d] \\ I^2/\partial I^2 \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^2/Y \end{tikzcd}$$

La composition

$I^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/Y = B$

envoie ∂I^2 sur le point b_0 donné par la classe de Y car $\partial I^2 \subset Y$. Elle passe au quotient.

Ce n'est pas un homéo, elle n'est pas surjective, par ex le point $(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$ n'est pas dans l'image

(c) Le même raisonnement qu'en (a) est valide pour tout carré $[n; n+1] \times [m; m+1] = C_{n,m}$ et son bord $\partial C_{n,m}$. On a donc des applications $f_{n,m} : S^2_{n,m} \overset{h}{\approx} C_{n,m}/\partial C_{n,m} \longrightarrow B$ induites par les inclusions comme en (b). On obtient aussi que le pt de base de $S^2_{n,m}$ est envoyé sur b_0, celui de B car $\partial C_{n,m} \subset Y$.

Ainsi les applications définissent

$$f : \bigvee_{\mathbb{Z}^2} S^2_{n,m} \longrightarrow B \quad \text{par passage au}$$

quotient de $\coprod S^2_{n,m} \xrightarrow{\amalg f_{n,m}} B$.

Cette application est surjective car $\bigcup C_{n,m} = \mathbb{R}^2$, elle est également injective, mais il faut construire son inverse pour montrer que c'est un homéo.

On construit $g : B \longrightarrow \bigvee_{\mathbb{Z}^2} S^2_{n,m}$ en posant

$$G\big|_{C_{n,m}} : C_{n,m} \longrightarrow C_{n,m}/\partial C_{n,m} \overset{h^{-1}}{\approx} S^2_{n,m} \hookrightarrow \bigvee_{\mathbb{Z}^2} S^2_{n,m}$$

G est une application continue sur $\mathbb{R}^2$. Clairement la préimage d'un ouvert de $S^2_{n,m}$ ne contenant pas le pôle Sud est un ouvert de $C_{n,m}$ ne coupant pas le bord. Reste le pt de base du wedge infini. ~~Sa préimage~~ Un tel ouvert contient un petit disque ouvert centré en $(0;0;-1)$ pour chaque sphère par définition de la topologie quotient. Sa préimage dans $\mathbb{R}^2$ est alors un voisinage ouvert de Y. Ainsi G passe au quotient et définit l'inverse g de f.

Question 2, Théorie des groupes. (10 points) Soient $\alpha, \beta \colon G \to H$ deux homomorphismes de groupes. On dit qu'un homomorphisme $\lambda \colon H \to L$ *coégalise* α et β si $\lambda \circ \alpha = \lambda \circ \beta$. On cherche à comprendre dans cet exercice le "meilleur tel groupe", c'est-à-dire un groupe K et un homomorphisme $\kappa \colon H \to K$ qui coégalise α et β et tel que pour tout autre $\lambda \colon H \to L$ qui coégalise α et β il existe un unique homomorphisme $u \colon K \to L$ tel que $\lambda = u \circ \kappa$.

(a) (1 pt) En représentant les deux homomorphismes α et β comme deux flèches parallèles entre G et H, représenter la propriété universelle de κ sous forme de diagramme.

(b) (2 points) Montrer que si K et κ existent, alors la propriété universelle détermine K à isomorphisme près. Puisque ce K est alors unique, on l'appelle le *coégalisateur* de α et β.

(c) (2 points) Construction de K. On définit K comme le quotient du groupe H par le sous-groupe normal engendré par les éléments $\alpha(g)\beta(g)^{-1}$ pour tous les $g \in G$. Définir κ et vérifier la propriété universelle.

(d) (1 points) Si G et H sont donnés par des présentations de groupes $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_k \rangle$ et $H = \langle y_1, \ldots, y_m \mid s_1, \ldots, s_\ell \rangle$, donner une présentation de K.

(e) (1 points) Si G et H sont abéliens, montrer que $K \cong H/Im(\alpha - \beta)$.

(f) (2 points) Calculer le coégalisateur des homomorphismes $F(x) \to F(a, b)$ qui envoient x sur a et sur bab^{-1} respectivement. Même question avec $\alpha(x) = a$ et $\beta(x) = b$.

(a)
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & H \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\lambda"'] & K \arrow[d, "u \; \exists !"] \\ & & L \end{tikzcd}$$

1

(b) Soient K et K' deux groupes ayant la propriété universelle décrite en (a). Alors il existe un unique $u : K \to K'$ tq $u \circ \kappa = \kappa' : H \to K'$ et un unique $u' : K' \to K$ tq $u' \circ \kappa' = \kappa : H \to K$.

Mais alors $u' \circ u \circ \kappa = u' \circ \kappa' = \kappa = id_K \circ \kappa$.

Considérons $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} H \xrightarrow{\kappa} K$. Alors
$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\kappa"'] & K \arrow[d, shift right, "id_K"'] \arrow[d, shift left, "u' \circ u"] \\ & K \end{tikzcd}$$

par unicité $u' \circ u = id_K$. De même $u \circ u' = id_{K'}$.

Ceci montre que K et K' sont isomorphes.

(c) Posons $K = H / \langle\!\langle \alpha(g)\beta(g)^{-1} \mid \forall g \in G \rangle\!\rangle$ et vérifions la propriété universelle pour $\lambda : H \to L$

On pose $\lambda : H \to K$ le quotient

Comme $\lambda \circ \alpha = \lambda \circ \beta$, on a $\lambda(\alpha(g)\beta(g)^{-1}) = (\lambda\circ\alpha)(g) \cdot (\lambda\circ\beta)(g)^{-1} = 1$ $\forall g \in G$, donc λ passe au quotient et définit $u : K \longrightarrow L$.
Par construction $u \circ \lambda = \lambda$. L'unicité est claire car $u([h]) = \lambda(h)$ pour tout $h \in H$ si on veut que le triangle (1) commute.

(d) Par le point (c) on définit

$$K = \langle y_1, \dots, y_m \mid s_1, \dots, s_k, \alpha(x_1)\beta(x_1)^{-1}, \dots, \alpha(x_n)\beta(x_n)^{-1} \rangle$$

c'est le quotient de H par les relations données par $\alpha(x_i)\beta(x_i)^{-1}$ $\forall x_i$ générateur de G.

(e) Si G et H sont abéliens, alors en notation additive le ss-groupe normal engendré par $\alpha(g)\beta(g)^{-1}$ est celui engendré par $\alpha(g) - \beta(g) = (\alpha - \beta)(g)$. C'est $\operatorname{Im}(\alpha - \beta)$.

(f) $$F(x) \underset{x \mapsto bab^{-1}}{\overset{x \mapsto a}{\rightrightarrows}} F(a, b)$$

Par (d), $K = \langle a, b \mid bab^{-1}a^{-1} \rangle = \langle a, b \mid [a, b] \rangle$
$\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$F(x) \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} F(a, b)$$

Par (d), $K = \langle a, b \mid ab^{-1} \rangle \cong \langle a \mid \; \rangle \cong \mathbb{Z}$

Question 3. Propriété d'extension. (9 points) Soit T le tore de révolution dans $\mathbb{R}^3$ obtenu par rotation du cercle de centre $(0;2;0)$ et de rayon 1 autour de l'axe vertical Oz. On considère deux inclusions $S^1 \hookrightarrow T$. La première i est celle du cercle méridien décrit ci-dessus, la seconde j est celle du cercle parallèle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 1 se trouvant dans le plan horizontal Oxy.

(a) (2 points) Les deux inclusions i et j définissent une application $k\colon S^1 \coprod S^1 \to T$. Définir formellement cette application et expliquer pourquoi elle induit une application *pointée* et injective $S^1 \vee S^1 \to T$.

(b) (2 points) Exprimer T comme un espace obtenu de $S^1 \vee S^1$ par attachement d'une 2-cellule en donnant l'application d'attachement a (des explications *précises* suffisent, aucune formule n'est demandée).

(c) (3 points) Soit $f\colon S^1 \vee S^1 \to X$ une application. On cherche à comprendre quand il existe une application $g\colon T \to X$ tel que $g \circ k = f$. Représenter ce problème d'extension sous forme de diagramme commutatif pour montrer que l'existence de g est équivalente à l'existence d'une certaine homotopie.

(d) (1 point) Montrer que l'extension g existe si et seulement si la classe d'homotopie du lacet $f \circ a$ dans $\pi_1 X$ est triviale.

(e) (1 point) Soit X un espace dont le groupe fondamental $\pi_1 X$ est abélien. Montrer que toute application f admet une extension g (avec les mêmes notations qu'au point (c)).

(a) k est définie sur le coproduit par deux applications.

La première est $k_1: S^1 \xrightarrow{\approx} \underbrace{\mathcal{T}((0;2;0);1)}_{\text{cercle de centre } (0;2;0),\ \text{rayon } 1} \overset{T_1}{\hookrightarrow} T$

$1 \longmapsto (0;1;0)$

La seconde est $k_2: S^1 \xrightarrow{\approx} \mathcal{T}(0;1) \hookrightarrow T$ "T_2"

$1 \longmapsto (0;1;0)$

toutes deux dans le sens trigonométrique dans les plans Oyz et Oxy respectivement.

Comme le pt de base $1 \in S^1$ est envoyé sur le même point $(0;1;0) \in T$, k passe au quotient et définit une application $\hat{\ell}: S^1 \vee S^1 \hookrightarrow T$ qui est injective car les deux cercles ont un seul point commun.

(b) $T \approx (S^1 \vee S^1) \cup_f e^2$ où ~~k~~ $a: S^1 \longrightarrow \mathrm{Im}(\hat{\ell})$ est l'application d'attachement donnée en quatre morceaux sur $\{e^{2\pi i t} / 0 \le t \le 1\}$. Pour $0 \le t \le \frac{1}{4}$ on parcourt T_1 selon k_1, $t \mapsto k_1(e^{8\pi i t})$

$\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2}$ ——— T_2 selon k_2

Puis, $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}$ on parcourt k_1 dans l'autre sens
$\frac{3}{4} \leq t \leq 1$ ——— k_2 ———.

En effet on sait que le tore est homéomorphe au quotient de I^2 par l'identification des côtés opposés dans le même sens, ces paires de côtés deviennent respect. méridien et parallèle du tore, ici $\operatorname{Im} k_1$ et $\operatorname{Im} k_2$

(c) On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "a"'] & D^2 \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "G\,?"] & \\
S^1 \vee S^1 \arrow[r, hook, "\ell"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & T \arrow[dr, dashed, "\exists ?\, g"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Puisque T est le pushout (est homéomorphe au p.o) du carré supérieur l'existence et l'unicité de g suit de celle de $G : D^2 \longrightarrow X$, une application tq $G \circ i = f \circ a$ (qui fait commuter le carré extérieur du diagramme ci-dessus).

On interprète G comme une homotopie de $f \circ h$ vers l'application constante $S^1 \longrightarrow X$ puisqu'on sait qu'une telle homotopie $S^1 \times I \longrightarrow X$ est équivalente à une application $S^1 \times I /_{1 \times I} = CS^1 \approx D^2$

(d) On a vu ci-dessus que g existe ssi G existe ssi $f \circ a \simeq c$ est homotopiquement constante

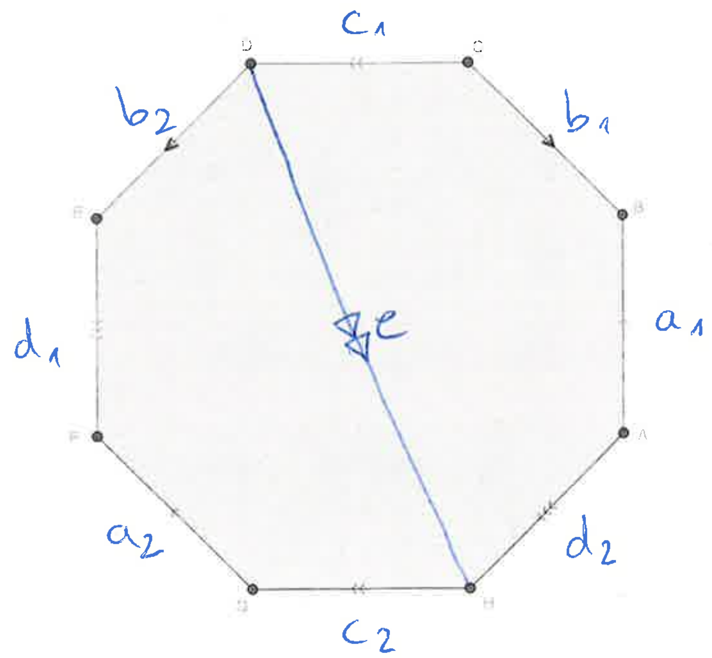
Or $f \circ a$ est un lacet $S^1 \longrightarrow S^1 \vee S^1 \longrightarrow X$

Ainsi g existe ssi $[f \circ a] = *$ dans $\pi_1 X$.

(e) ~~Si $\pi_1 X$ est abélien~~ ~~alors~~ En général $f : S^1 \vee S^1 \to X$ est la donnée de deux lacets $f_1 : S^1 \xhookrightarrow{i_1} S^1 \vee S^1 \to X$ et $f_2 : S^1 \xhookrightarrow{i_2} S^1 \vee S^1 \to X$, la composition $f \circ a$ est le commutateur $f_1 * f_2 * \overline{f_1} * \overline{f_2}$ par définition de a en (b).

Si $\pi_1 X$ est abélien, alors ce commutateur est homotopiquement trivial, donc f admet toujours une extension.

Question 4, une surface. (8 points) On donne la présentation polygonale suivante qui définit une surface S par identification des huit côtés d'un octogone O, deux à deux dans le sens indiqué par les flèches (par exemple le côté CB est identifié au côté DE).



(a) (1 pt) On considère le lacet de O basé en A parcourant le bord de l'octogone dans le sens trigonométrique. Expliquer pourquoi ce lacet est homotope au lacet constant c_A.

(b) (2 pts) Déduire du point (a) une présentation du groupe fondamental G de S sous sa forme correspondant à la présentation polygonale ci-dessus.

(c) (4 pts) Effectuer des découpages et des recollements pour identifier cette surface avec la somme connexe de plan(s) projectif(s) et de tore(s). On ne demande pas des homéomorphismes explicites, mais des explications qui accompagnent les illustrations.

(d) (1 pts) Identifier cette surface sous sa forme "standard" donnée dans le Théorème de classification et donner le groupe fondamental G de S sous sa forme standard.

(a) Comme $O \simeq D^2$, cet octogone est contractile, tous les lacets sont homotopiquement constants.

(b) on nomme $a_1, a_2, \ldots$ les arêtes de l'octogone et les chemins parcourus dans le sens des flèches les décorant. Comme tous les sommets sont identifiés, ∂O quotient par la relation d'équivalence restreinte au bord est un wedge de quatre cercles $S^1_a \vee S^1_b \vee S^1_c \vee S^1_d$

On considère $S^1 \xrightarrow{f} S^1 \vee \cdots \vee S^1$ où $h : D^2 \simeq O \xrightarrow{q} S$

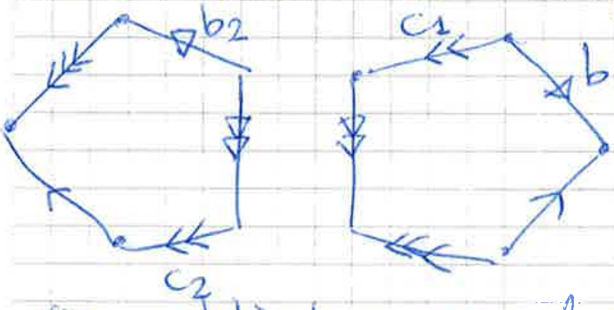
le pushout

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S^1 \vee \cdots \vee S^1 \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ D^2 \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "h"'] & (S^1 \vee \cdots \vee S^1) \cup e^2 \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ & & S \end{tikzcd}$$

et g est induit par $\partial O \hookrightarrow O$ et passage au quotient.

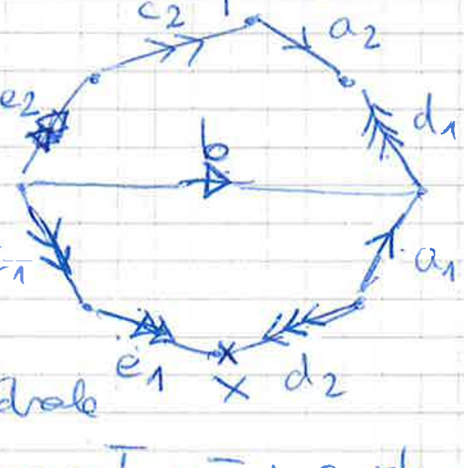
On a alors une application induite (bijective) qui est un homéo car la source est compacte et le but est Hausdorff.
Par SvK, $\pi_1 S \cong \pi_1(S^1_a \vee S^1_b \vee S^1_c \vee S^1_d \cup_f e^2)$
$\cong F(\alpha,\beta,\gamma,\delta) / \mathrm{Im} f_* = \langle \alpha,\beta,\gamma,\delta \mid \alpha\beta^{-1}\gamma\beta\delta\alpha^{-1}\gamma^{-1}\delta \rangle$
où $\alpha = [a]$ est la classe du lacet a, image dans le quotient du chemin a_1, etc.

(c) On appelle e le chemin parcouru de D vers H de manière rectiligne. Par la technique du quotient en deux temps S est le quotient de l'union disjointe des deux pentagones qu'on recolle en identifiant deux à deux les cinq paires de côtés a_i, b_i, c_i, d_i et e_i.



On choisit d'identifier b_1 et b_2 d'abord en c avant de quotienter le reste.

On obtient un nouvel octogone



Quitte à renommer $d_2 = \bar f_1, d_1 = \bar f_2$
$c_2 = \bar g_1, c_1 = \bar g_2, e_2 = \bar h_1, e_1 = \bar h_2$

on obtient une présentation polyédrale correspondant au lacet en X $d_1 * a_1 * \bar d_2 * \bar a_2 * g_1 * h_1 * \bar g_2 * \bar h_2$
C'est la somme connexe de deux tores.

(d) ______________________. Son groupe fondamental est $\langle \delta,\alpha,\gamma,\eta \mid [\delta,\alpha].[\gamma,\eta] \rangle$
où $\delta = [d], \alpha = [a], \gamma = [g], \eta = [h]$ où par ex h est le lacet image dans le quotient du chemin h_1.

Question 5, Une application du Théorème de Seifert-van Kampen. (12 points) Soit $\mathbb{R}P^2$ le quotient de la sphère S^2 par la relation antipodale $x \sim \pm x$.

(a) (2 points) Décrire des ouverts saturés $A', B' \subset S^2$ dont les images $A, B \subset \mathbb{R}P^2$ vérifient les conditions du Théorème de Seifert-van Kampen. Choisir un point de base commun x'.

(b) (3 points) Décrire dans A', B' et $C' = A' \cap B'$ des chemins dont les images dans le quotient engendrent les groupes fondamentaux de A, B et $C = A \cap B$ pour le point de base x, image de x' dans $\mathbb{R}P^2$.

(c) (3 points) Identifier les groupes fondamentaux de A, B et C et les deux homomorphismes induits par les inclusions.

(d) (2 points) Calculer le groupe fondamental de $\mathbb{R}P^2$.

(e) (2 points) Faire le même calcul à l'aide la théorie des revêtements.

(a) Soit $p : S^2 \longrightarrow D^2$ la projection. Dans D^2 on
$(x,y,z) \mapsto (x,y)$.
considère le disque D ouvert de centre O et de rayon 3/4 et on choisit $A' = p^{-1}(D)$ qui consiste donc en deux composantes convexes, voisinages des pôles

. On choisit ensuite $D^2 \setminus D'$ D' disque centré en O de rayon 1/4 et on appelle B' sa préimage voisinage de l'équateur

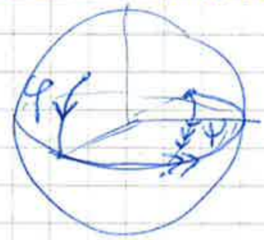
. Les ouverts de S^2 sont saturés, stables par l'antipodale. Les images dans $\mathbb{R}P^2$ sont connexes par arcs (image de B' connexe par arcs et de $A'' \{ a' \in A' \mid a'_3 > 0 \}$, connexe par arcs) L'intersection $C' = A' \cap B'$ n'est pas connexe par arcs, mais C est l'image de la partie $C'' = \{ c' \in C' \mid c'_3 > 0 \}$ comme pour A. On choisit $x'_0 = (\sqrt{2}; 0; \sqrt{2})$ comme pt de base.

(b) Comme A'' est contractile, on choisit simplement le lacet constant c_x. On a aussi A contractile.
C'' est homéomorphe à un cylindre ouvert $S^1 \times]\frac{1}{4}; \frac{3}{4}[$

et son image est homéomorphe à C'' car aucune identification n'est faite. On choisit alors comme lacet basé en x_0 $\gamma : t \longmapsto \sqrt{2}(\cos 2\pi t ; \sin 2\pi t ; 1)$

Enfin pour B' la situation est plus complexe car B' contient des points et leurs antipodaux. On choisit par exemple la moitié du lacet β' ci-dessus, pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ qu'on concatène avec le demi φ reliant $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ à $(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) = -x_0$ par l'arc de cercle méridien : β :

ou mieux



(c) $\pi_1 A = 1$ car $A \simeq A''$ est contractile

$\pi_1 C \cong \pi_1 C'' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cylindre homotope au cercle}}}{\cong} \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$

$\pi_1 B \cong \mathbb{Z}$ car $B'' \simeq S^1$ le cercle équateur dont l'image est un cercle (le demi-cercle de S^1 ci-dessus dont on identifie les extrémités).

(d) Par Seifert van Kampen

$$\begin{tikzcd} \pi_1 C \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1 A \arrow[d] \\ \pi_1 B \arrow[r] & \pi_1 RP^2 \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] \end{tikzcd}$$

est pushout

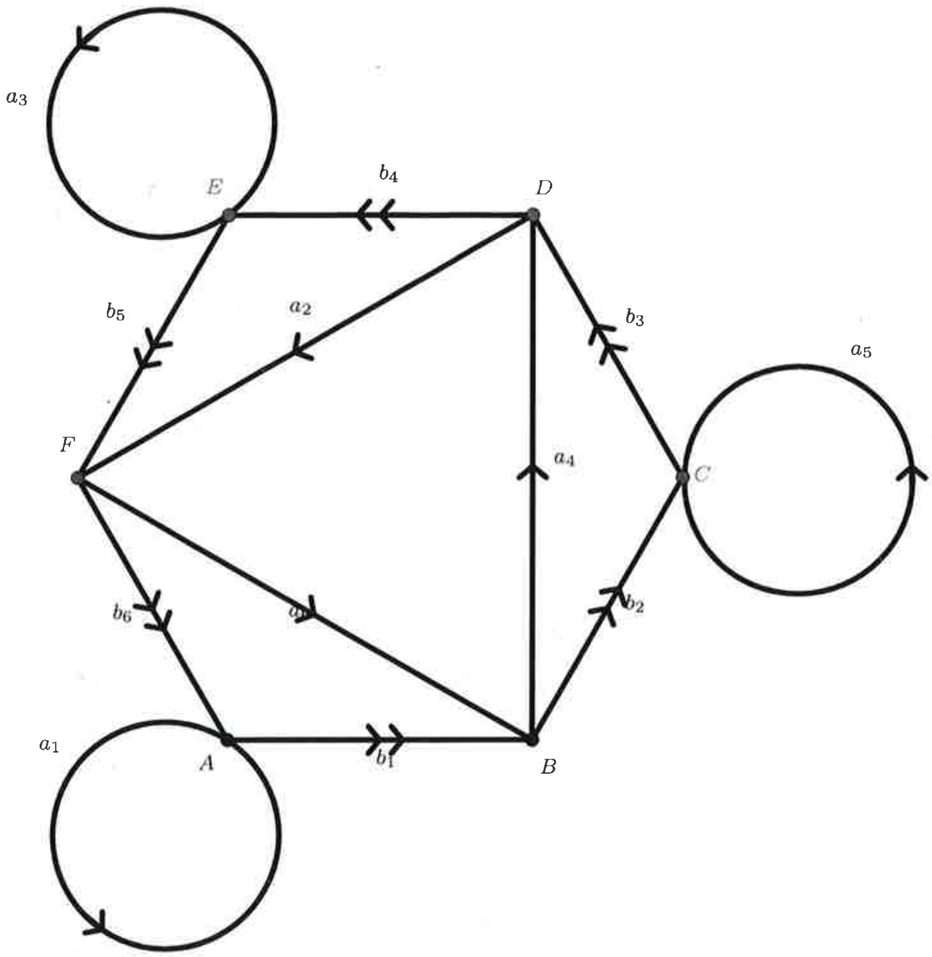
Or $\pi_1 C \longrightarrow \pi_1 B$ est la
$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}$
multiplication par 2 le lacet γ est en effet homotope à ~~$\varphi \star \varphi \star \varphi \star \varphi$~~ $\varphi \star \underbrace{\gamma' \star \gamma''}_{2 \text{ moitiés de l'équateur}} \star \overline{\varphi} \simeq$

$\varphi \star \gamma' \star \psi \star \overline{\psi} \star \gamma'' \star \overline{\varphi} = \gamma \star a(\gamma)$ dont l'image est $\gamma \star \gamma$.

Donc $\pi_1 RP^2 \cong \mathbb{Z}/2$

(e) $S^2 \longrightarrow RP^2$ est un revêtement à 2 feuillets. Comme S^2 est le revêtement universel ($\pi_1 S^2 = 1$), $\pi_1 RP^2$ est cyclique d'ordre 2.

Question 6. Revêtements de la bouteille de Klein. (16 points) Considérons l'espace E ci-dessous, obtenu en attachant aux six points A, B, C, D, E et F les six 1-cellules b_i et les six 1-cellules a_i pour $1 \leq i \leq 6$. Soit A son point de base.



(a) (4 points) Montrer que E est homotope à un wedge d'un certain nombre de cercles, identifier ce nombre k et décrire pour chacun un lacet dont la classe d'homotopie est l'un des k générateurs de $\pi_1 E$. On donnera ces lacets comme concaténation de chemins $a_i, b_i, \bar{a}_i$ ou $\bar{b}_i$ où les barres font référence à l'orientation indiquée par les flèches qui décorent les 1-cellules.

(b) (3 points) Montrer que le groupe cyclique C_3 agit sur E en permutant les sommets et les 1-cellules. Expliquer pourquoi cette action définit un revêtement $p\colon E \to X$ et décrire X

(c) (2 points) Montrer que X forme un revêtement du wedge de deux cercles et que la composition $q\colon E \xrightarrow{p} X \xrightarrow{r} S^1_a \vee S^1_b$ est un revêtement.

(d) (2 points) Parmi les revêtements p, q et r, lesquels sont galoisiens ?

(e) (2 points) Calculer l'image par p_* du groupe fondamental $\pi_1 E$ (pour le point de base A) en donnant les images des générateurs du point (a) comme éléments de $F(\alpha, \beta)$. α, β

(f) (3 points) Parmi les homomorphismes $\pi_1 E \xrightarrow{q_*} \pi_1 X$, $\pi_1 X \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1_a \vee S^1_b)$ et la composition $r_* \circ q_*$, lesquels sont injectifs et lesquels ont pour image un sous-groupe normal ? Justifier toutes vos réponses.

(a) La figure constituée du cercle a_1 et de l'hexagone formé des b_i est homotope à un wedge de deux cercles basé en A, Cette figure est convexe par arcs si bien que chaque attachement d'une 1-cellule $a_2, \dots, a_6$ est homotope à l'attachement par une application constante en A. Ainsi cet espace E est homotope à un wedge de sept cercles. On avait déjà deux lacets : $\boxed{a_1}$ et $\boxed{b_1 * b_2 * b_3 * b_4 * b_5 * b_6}$

Pour a_3 et a_5 on utilise les homotopies qui correspondent aux chemins $\overline{b_6} * \overline{b_5}$ et $b_1 * b_2$ respectivement si bien qu'on ajoute

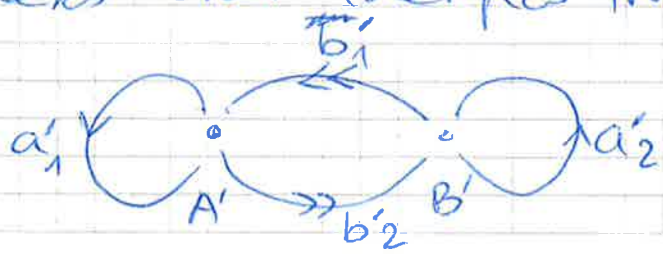
$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{b_6} * \overline{b_5} * a_3 * b_5 * b_6 \\ b_1 * b_2 * a_5 * \overline{b_2} * \overline{b_1} \end{array}}$$

Pour les arêtes a_2, a_4, a_6 on choisit les chemins de A vers B, D et F suivants : b_1, $b_1 * b_2 * b_3$, $\overline{b_6}$ et on ajoute alors

$$\boxed{\begin{array}{l} b_1 * b_2 * b_3 * a_2 * b_6 \\ b_1 * a_4 * \overline{b_3} * \overline{b_2} * \overline{b_1} \\ \overline{b_6} * a_6 * b_1 \end{array}}$$

(b) On a une action par rotations (centre = centre du cercle circonscrit des triangles et hexagone) d'angle $2\pi/3$, $4\pi/3$ et l'identité. Cette action permute cycliquement les sommets et les arêtes du graphe. Elle est totalement discontinue pour cette raison.

Par conséquent $X = E/C_3 \xleftarrow{I} E$ est un revêtement. Les sommets et les arêtes étant identifiés trois par trois, X ressemble à



où A' est l'image des points A, C, E
B' ——————————————— B, D, F
a_1' ——————— arêtes a_1, a_3, a_5 & de même pour b !
a_2' ——————————————— a_2, a_4, a_6

En effet a_1' est un cercle, image de cercles,
a_2' aussi, image d'un segment dont les extrémités sont identifiées.

(c) On a une nouvelle action de C_2 sur X par rotation de π, si bien que $X \xrightarrow{r} X/C_2$ est encore un revêtement. L'espace quotient X/C_2 est homéomorphe à un wedge $S^1_a \vee S^1_b$ où A' et B' sont identifiés et forment le point de base de X/C_2, a_1' et a_2' forment S^1_a,
b_1' et b_2' ——— S^1_b

La composition $r \circ p$ est un revêtement car les fibres de r sont finies.

(d) p et r sont galoisiens, obtenus comme quotients par des actions totalement discontinues de groupes finis.

Par contre $q = r \circ p$ n'est pas galoisien, c'est un revêtement à six feuillets de $S^1_a \vee S^1_b$, mais aucun automorphisme de q ne peut envoyer A sur B puisque l'arête a_1 relie A à A, mais aucune arête a_i ne relie B à B.

(e) On utilise les lacets du point (b) pour définir $p_* : F(7) \longrightarrow F(\alpha, \beta)$

$\mathrm{Im}\, p_* = \langle \alpha, \beta^6, \beta^{-2}\alpha\beta^2, \beta^2\alpha\beta^{-2}, \beta^3\alpha\beta, \beta\alpha\beta^{-3}, \beta^{-1}\alpha\beta \rangle$

(f) p_*, q_*, r_* sont tous injectifs, ils sont induits par des ~~les~~ applications qui sont des revêtements

q_* et r_* ont des images normales car les rev. correspondants sont galoisiens

Im p_* n'est pas normal car p n'est pas galoisien