EPFL – Semestre de Printemps 2024–2025
Topologie II **Corrigé 13**

Exercice 1.
Pour $n \geq 1$, on note $\alpha_n \colon S^1 \to S^1$ l'homéomorphisme donné par $z \longmapsto z^n$, où l'on utilise $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$.

1. Montrer que α_n forme un revêtement et dire à quel sous-groupe de $\pi_1(S^1)$ il correspond, et si c'est un revêtement normal.
2. Identifier le groupe d'automorphismes de revêtement de α_n.

Solution 1.

1. L'existence locale de racine $n-$ème dans $\mathbb{C}$ permet de montrer que α_n est un revêtement. De plus, l'application induite sur le π_1 est la multiplication par n, donc le sous-groupe correspondant est $n\mathbb{Z}$, qui est normal.
2. On a $Aut(\alpha_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On définit un morphisme $\phi_d \colon S^1 \to S^1$ donné par $cos(\theta)+isin(\theta) \to cos(\frac{d}{n}+\theta)+i\,sin(\frac{d}{n}+\theta)$. On vérifie facilement qu'il s'agit d'un isomorphisme, et que $\phi_d \circ \phi_{d'} = \phi_{d+d'}$. De plus, on peut montrer que tout automorphisme est de cette forme. Un automorphisme de revêtement doit préserver la fibre d'un point, en particulier ici la fibre du point base 1, constituées des racines $n-$ièmes de l'unité. Notons $\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. L'image de 1 par un automorphisme ϕ de α_n est de la forme ζ_n^d, pour $d \in \mathbb{Z}$. Considérons l'image par ϕ d'un point quelconque dans la fibre de 1, disons ζ_n^k. Le relèvement unique du générateur de $\pi_1(S^1)$ (parcourant le cercle dans le sens trigonométrique) partant de ζ_n^d est un chemin allant de ζ_n^d vers ζ_n^{d+1}. Comme un isomorphisme de revêtement envoie un relèvement partant de x sur le relèvement partant de $\phi(x)$, on en déduit que $\phi(\zeta_n) = \zeta_n^{d+1}$, puisque ζ_n est l'arrivée du relèvement partant de 1 et ζ_n^{d+1} l'arrivée du relèvement partant de $\phi(1)$. Ainsi, par récurrence, $\phi(\zeta_n^k) = \zeta_n^{k+d}$, et $\phi = \phi_{[d]}$ où $[d] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2.
Une action (à droite) d'un groupe discret G sur un espace topologique X est dite totalement discontinue si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour tout $g \neq e_G \in G$, $U \cdot g \cap U = \emptyset$.

1. Supposons que G est un groupe fini et X séparé. Montrer que l'action de G est totalement discontinue si et seulement si elle est libre.
2. Montrer que si G agit de manière totalement discontinue sur X, alors le quotient $q \colon X \to X/G$ est un revêtement normal.

Solution 2.

1. Si l'action est totalement discontinue, alors pour tout $g \neq g'$, pour tout x il existe un voisinage U de x tel que $U \cdot g \cap U \cdot g' = \emptyset$, en particulier $x \cdot g \neq x \cdot g'$. Si l'action est libre, alors l'orbite de x est constitué de $|G|$ points distincts, et comme X est séparé on peut trouver des ouverts deux à deux disjoints autour de chacun de ces points. Prenons une paire $(x, y = x \cdot g)$ et des voisinnages disjoints U et V de x et y. On peut considérer $V \cdot g^{-1} \subset U$ et $(V \cdot g^{-1}) \cdot g \subset U$. Ce sont deux ouverts translatés disjoints. Plus généralement, on peut trouver de manière

inductive $|G|$ ouverts disjoints contenant chacun l'un des points de l'orbite de x et tous translatés d'un voisinage de x.

2. Voir Proposition 4.2 et 11.2 du polycopié.

Exercice 3. Revêtements des tores à g-trous. Soit T_g le tore à g-trous, somme connexe de g tores. On étudie dans cet exercice quelques revêtements de T_g.

1. Montrer que T_3 est un revêtement de T_2 à deux feuillets. On pourra définir une action de C_2 sur T_3 et construire le quotient. Que peut-on dire des groupes fondamentaux ?
2. Décrire un revêtement à trois feuillets de T_2 dont le type d'homotopie est un tore à quatre trous.
3. Plus généralement, pour $m, n \geq 1$, construire une action de C_n sur le tore à $mn + 1$ trous de manière à obtenir un revêtement $T_{mn+1} \to T_{m+1}$.

Exercice 3.

1. On représente la surface T_3 dans $\mathbb{R}^3$ de sorte que ses 3 anses soient alignés et isométriques, le trou central étant centré en l'origine, les deux autres de part et d'autre sur l'axe Oy. On note O le point de $\mathbb{R}^3$ situé au centre du trou central (on a $O \notin T_3$). Le groupe cyclique C_2 agit sur T_3 par une rotation centrée en O et d'angle π. Cette action est totalement discontinue (en particulier on a pas de point fixe) ainsi le quotient $q : T_3 \to T_3/C_2$ est un revêtement.

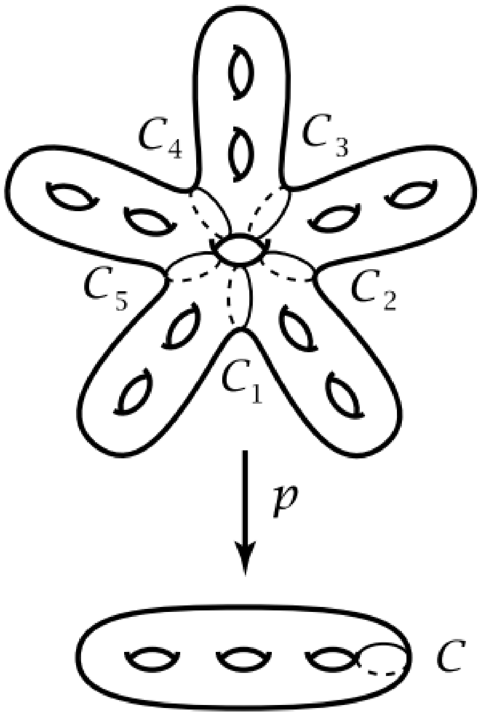
   L'espace quotient T_3/C_2 peut être identifié à T_2. On peut faire un dessin ou calculer la caractéristique d'Euler de cette surface, mais il est aussi possible de le vérifier en remarquant que le "demi-tore à trois trous", intersection de T_3 avec le demi-espace $y \geq 0$, forme un domaine fondamental pour l'action. Les seules identifications qui sont faites sont celles dans le plan vertical Oxz, les deux cercles sont identifiés point par point.

   On peut mentionner (sans faire les détails) qu'il est aussi possible de décrire une action sur le dodéecagone ou le quotient donnant notre modele de T_3 n'est pas donnée par le produit de trois commutateurs $[a, b][c, d][e, f]$, mais plutôt $[a, b]cd[e, f]c^{-1}d^{-1}$. La même rotation d'angle π agit en échangeant a et e, b et f, si bien que le quotient est donné par l'identifcation usuelle de l'octogone.

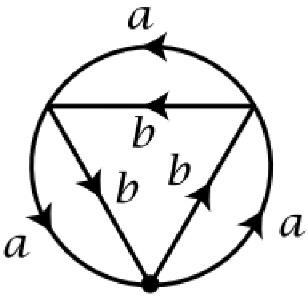
   Au niveau des groupes fondamentaux, q induit un homomorphisme injectif de groupes $\pi_1 T_3 \hookrightarrow \pi_1 T_2$. Son image $N \lhd \pi_1 T_2$ est un sous-groupe normal d'indice 2 (le quotient $\pi_1 T_2/N$ s'identifie à C_2). Un example de tel sous-groupe (correspondant à un choix particulier de générateurs de $\pi_1 T_2$ et $\pi_1 T_3$) est donné par

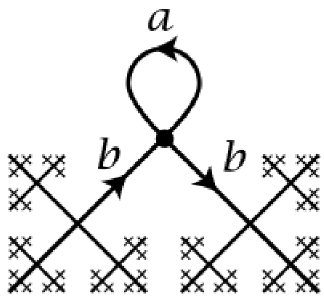
   $$\langle\, a, b^2, c, d, b^{-1}cb, b^{-1}db \,\rangle \lhd \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle \cong \pi_1 T_2$$

2. On représente cette fois T_4 dans $\mathbb{R}^3$ avec une anse centrale et les trois autres disposées à distance égale formant des angles $\frac{2\pi}{3}$. Alors la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ fournit une action de C_3 sur T_4 qui est propre et libre. De même que précédemment, on obtient un revêtement à trois feuillets $T_4 \to T_2$.
3. On généralise les précédents exemples en représentant T_{mn+1} avec un trou centré en l'origine et n "bras" avec chacun m trous, de sorte d'avoir une symétrie par rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, qui donne une action totalement discontinue. Par le même raisonnement sur le domaine fondamental de l'action illustré ci-dessous (pour $n = 5$, $m = 2$), on voit que le quotient a $m + 1$ trous.



Exercice 4. Voici deux revêtements du bouquet (wedge) de 2 cercles. Le sommet entouré d'un rond noir est le point base.





1. Calculer les sous-groupes de $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ correspondants.
2. Dire pour chacun s'il est normal.

Solution 4. Pour le premier le sous-groupe est $\langle a^3, b^3, ab^{-1}, b^{-1}a \rangle$ qui est normal. En effet il existe des isomorphismes pointés entre toutes les versions de ce revêtement différant par le choix du point base, montrant que tous les conjugués de ce groupe lui sont égaux.
Pour le deuxième dessin, le sous-groupe est $\langle a \rangle$ qui n'est pas normal. On voit d'ailleurs qu'il n'existe pas d'isomorphisme pointé de ce revêtement vers ce même revêtement muni d'un autre point base.

Toutes les figures sont issues du livre Algebraic Topology de Hatcher.