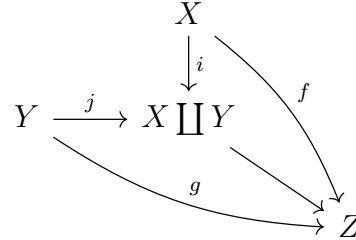


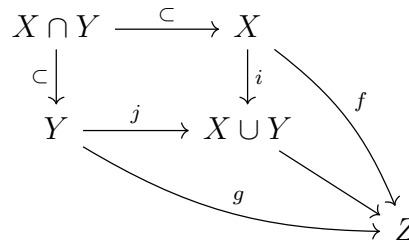
**Exercice 1. La propriété universelle du pushout.**

1. Soit  $X, Y, Z$  des espaces topologiques, et  $f : X \rightarrow Z$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  deux applications continues. Montrer qu'il existe une unique application continue  $f \amalg g : X \amalg Y \rightarrow Z$  qui fait commuter le diagramme



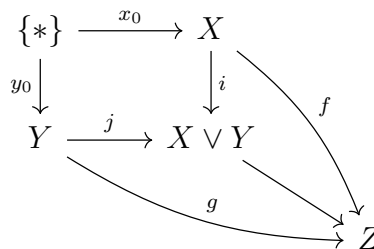
où  $i : X \hookrightarrow X \amalg Y$  et  $j : Y \hookrightarrow X \amalg Y$  sont les inclusions canoniques.

2. Soit  $T$  et  $Z$  deux espaces topologiques, et  $X, Y \subset T$  des sous-espaces *ouverts* de  $T$ . Si  $f : X \rightarrow Z$  et  $g : Y \rightarrow Z$  sont des applications, montrer qu'il existe une unique application  $f \cup g : X \cup Y \rightarrow Z$  qui fait commuter le diagramme



où  $i : X \hookrightarrow X \cup Y$  et  $j : Y \hookrightarrow X \cup Y$  sont les inclusions canoniques. Et si les sous-espaces ne sont pas ouverts ?

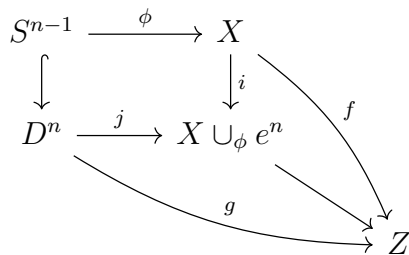
3. Soit  $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$  des espaces topologiques pointés, et  $f : X \rightarrow Z$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  deux applications pointées. Montrer qu'il existe une unique application pointée  $f \vee g : X \vee Y \rightarrow Z$  qui fait commuter le diagramme



où  $i : X \hookrightarrow X \vee Y$  et  $j : Y \hookrightarrow X \vee Y$  sont les inclusions canoniques.

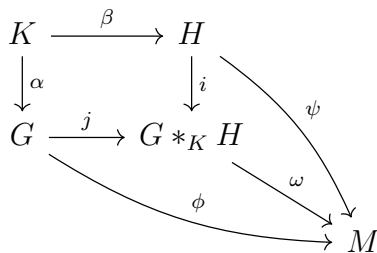
4. Soit  $X, Z$  des espaces topologiques et  $\phi : S^{n-1} \rightarrow X$ ,  $f : X \rightarrow Z$ ,  $g : D^n \rightarrow Z$  des applications continues. Montrer qu'il existe une unique application  $f \cup_\phi g : X \cup_\phi D^n \rightarrow Z$  qui fait commuter

le diagramme



où  $i : X \hookrightarrow X \cup_\phi e^n$  et  $j : D^n \hookrightarrow X \cup_\phi e^n$  sont les inclusions canoniques.

5. Soient  $G, H, K$  des groupes avec deux morphismes  $\alpha: K \rightarrow G$  et  $\beta: K \rightarrow H$ . Montrer que pour tout groupe  $M$ , tel que  $\psi: H \rightarrow M$  et  $\phi: G \rightarrow M$  avec  $\phi \circ \alpha = \psi \circ \beta$ , il existe un unique homomorphisme  $\omega: G *_K H \rightarrow M$  qui fait commuter le diagramme :



où  $i$  et  $j$  sont les morphismes canoniques.

**Exercice 2.** On note  $C_n$  le groupe cyclique d'ordre  $n$ . Identifier les pushouts de groupes suivants :

1.  $\mathbb{Z} \leftarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$
2.  $\mathbb{Z} \xleftarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z}$
3.  $0 \leftarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$
4.  $\mathbb{Z} \xleftarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}$
5.  $F(n) \leftarrow 1 \rightarrow F(m)$
6.  $\mathbb{Z}/2 \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/3$  où  $p$  et  $q$  sont les réductions modulo 2 et 3
7.  $\mathbb{Z}/m \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/n$  où  $p$  et  $q$  sont les réductions modulo  $m$  et  $n$
8.  $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{xy} F(x, y)$  où l'application  $xy$  envoie le générateur  $a$  sur  $xy$
9.  $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{x^2y^2} F(x, y)$  où l'application  $x^2y^2$  envoie  $a$  sur  $x^2y^2$
10. Montrer que ce dernier groupe n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Z}$  en exhibant un homomorphisme surjectif sur  $C_2 \times C_2$ .

**Remarque.** Un amalgame célèbre est  $C_4 *_{C_2} C_6$ , un groupe isomorphe à  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Un homomorphisme entre ces deux groupes est construit en considérant les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3.** Soit  $I$  un ensemble. Montrer que  $\pi_1(\bigvee_{i \in I} S^1)$  est un groupe libre.

**Exercice 4. Le tore.** On se propose de calculer le groupe fondamental du tore.

1. Trouver un recouvrement du tore  $T^2$  par deux ouverts  $A$  et  $B$ , le second étant contractile. Identifier le type d'homotopie de  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$ .
2. Identifier les groupes fondamentaux de  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$ , ainsi que l'homomorphisme induit par l'inclusion  $A \cap B \subset A$ .
3. Calculer  $\pi_1 T^2$ .

**Exercice 5.** On considère ici un graphe comme un espace topologique dont les arêtes sont homéomorphes à  $I$  et les extrémités sont identifiées si elles correspondent au même sommet. Plus formellement si  $\Gamma$  est un graphe dont les arêtes sont  $e \in E$  et les sommets  $s \in S$ , il s'agit d'une réunion disjointe de copies de  $I$ , autant qu'il y a d'arêtes et d'une réunion disjointe de points, autant qu'il y a de sommets :  $\coprod_E ([0, 1], e) \coprod \coprod_S (*, s)$ , que l'on quotiente par les relations  $(0, e) \sim (*, s)$  si  $s$  est l'origine de l'arête  $e$  et  $(1, e) \sim (*, s)$  si  $s$  est son but.

1. Soit  $\Gamma$  un graphe. Montrer que le collapse d'une arête  $a$  entre deux sommets distincts produit une équivalence d'homotopie  $q: \Gamma \rightarrow \Gamma/a$ .
2. Soit  $K_4$  le graphe complet à 4 sommets. Un graphe complet est tel qu'il y a une arête entre chaque paire de sommets disjoints. Calculer  $\pi_1(K_4)$ .
3. Plus généralement, étant donné un graphe  $\Gamma$  quelconque, donner une formule pour  $\pi_1(\Gamma)$  en terme de son nombre d'arêtes et de sommets.