EPFL - Semestre de Printemps 2024-2025
Topologie II **Série 8**

Exercice 1.La propriété universelle du pushout.

1. Soit X, Y, Z des espaces topologiques, et $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ deux applications continues. Montrer qu'il existe une unique application continue $f \coprod g : X \coprod Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "i"] \arrow[rdd, bend left, "f"] & \\ Y \arrow[r, "j"] \arrow[rrd, bend right, "g"] & X \coprod Y \arrow[rd] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \coprod Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \coprod Y$ sont les inclusions canoniques.

2. Soit T et Z deux espaces topologiques, et $X, Y \subset T$ des sous-espaces *ouverts* de T. Si $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ sont des applications, montrer qu'il existe une unique application $f \cup g : X \cup Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \cap Y \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\subset"'] & X \arrow[d, "i"] \arrow[rdd, bend left, "f"] & \\ Y \arrow[r, "j"] \arrow[rrd, bend right, "g"] & X \cup Y \arrow[rd] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \cup Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \cup Y$ sont les inclusions canoniques. Et si les sous-espaces ne sont pas ouverts ?

3. Soit $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ des espaces topologiques pointés, et $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$ deux applications pointées. Montrer qu'il existe une unique application pointée $f \vee g : X \vee Y \to Z$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "y_0"'] & X \arrow[d, "i"] \arrow[rdd, bend left, "f"] & \\ Y \arrow[r, "j"] \arrow[rrd, bend right, "g"] & X \vee Y \arrow[rd] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \vee Y$ et $j : Y \hookrightarrow X \vee Y$ sont les inclusions canoniques.

4. Soit X, Z des espaces topologiques et $\phi : S^{n-1} \to X$, $f : X \to Z$, $g : D^n \to Z$ des applications continues. Montrer qu'il existe une unique application $f \cup_\phi g : X \cup_\phi e^n \to Z$ qui fait commuter

le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
D^n \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "g"] & X \cup_\phi e^n \arrow[dr] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

où $i : X \hookrightarrow X \cup_\phi e^n$ et $j : D^n \hookrightarrow X \cup_\phi e^n$ sont les inclusions canoniques.

5. Soient G, H, K des groupes avec deux morphismes $\alpha\colon K \to G$ et $\beta\colon K \to H$. Montrer que pour tout groupe M, tel que $\psi\colon H \to M$ et $\phi\colon G \to M$ avec $\phi \circ \alpha = \psi \circ \beta$, il existe un unique homomorphisme $\omega\colon G *_K \to M$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & H \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
G \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, "\phi"] & G *_K H \arrow[dr, "\omega"] & \\
 & & M
\end{tikzcd}$$

où i et j sont les morphismes canoniques.

Exercice 2. On note C_n le groupe cyclique d'ordre n. Identifier les pushouts de groupes suivants :

1. $\mathbb{Z} \leftarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$
2. $\mathbb{Z} \xleftarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z}$
3. $0 \leftarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$
4. $\mathbb{Z} \xleftarrow{id} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$
5. $F(n) \leftarrow 1 \rightarrow F(m)$
6. $\mathbb{Z}/2 \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/3$ où p et q sont les réductions modulo 2 et 3
7. $\mathbb{Z}/m \xleftarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/n$ où p et q sont les réductions modulo m et n
8. $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{xy} F(x, y)$ où l'application xy envoie le générateur a sur xy
9. $1 \leftarrow F(a) \xrightarrow{x^2y^2} F(x, y)$ où l'application x^2y^2 envoie a sur x^2y^2
10. Montrer que ce dernier groupe n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$ en exhibant un homomorphisme surjectif sur $C_2 \times C_2$.

Remarque. Un amalgame célèbre est $C_4 *_{C_2} C_6$, un groupe isomorphe à $SL_2(\mathbb{Z})$. Un homomorphisme entre ces deux groupes est construit en considérant les matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit I un ensemble. Montrer que $\pi_1(\vee_{i \in I} S^1)$ est un groupe libre.

Exercice 4. Le tore. On se propose de calculer le groupe fondamental du tore.

1. Trouver un recouvrement du tore T^2 par deux ouverts A et B, le second étant contractile. Identifier le type d'homotopie de A, B et $A \cap B$.
2. Identifier les groupes fondamentaux de A, B et $A \cap B$, ainsi que l'homomorphisme induit par l'inclusion $A \cap B \subset A$.
3. Calculer $\pi_1 T^2$.

Exercice 5. On considère ici un graphe comme un espace topologique dont les arêtes sont homéomorphes à I et les extrémités sont identifiées si elles correspondent au même sommet. Plus formellement si Γ est un graphe dont les arêtes sont $e \in E$ et les sommets $s \in S$, il s'agit d'une réunion disjointe de copies de I, autant qu'il y a d'arêtes et d'une réunion disjointe de points, autant qu'il y a de sommets : $\coprod_E([0,1],e) \coprod \coprod_S(*,s)$, que l'on quotiente par les relations $(0,e) \sim (*,s)$ si s est l'origine de l'arête e et $(1,e) \sim (*,s)$ si s est son but.

1. Soit Γ un graphe. Montrer que le collapse d'une arête a entre deux sommets distincts produit une équivalence d'homotopie $q \colon \Gamma \to \Gamma/a$.
2. Soit K_4 le graphe complet a 4 sommets. Un graphe complet est tel qu'il y a une arête entre chaque paire de sommets disjoints. Calculer $\pi_1(K_4)$.
3. Plus généralement, étant donné un graphe Γ quelconque, donner une formule pour $\pi_1(\Gamma)$ en terme de son nombre d'arêtes et de sommets.