

# **Topologie**

Jérôme Scherer



## Table des matières

Introduction	5
1. 3Blue1Brown	6
2. Espaces topologiques	9
3. Notations	11
Chapitre 1. Les espaces quotients	13
1. La topologie quotient	13
2. Quotient par une relation	15
3. Quotient et axiomes de séparation	19
4. Quotients par des actions de groupes	23
5. Quelques quotients liés aux groupes $SO(n)$	27
6. Recoller des espaces	29
7. Attachement de cellules	31
Chapitre 2. Homotopies et groupe fondamental	35
1. Homotopie	35
2. Attachement de cellules et homotopie	38
3. Homotopie et $\pi_0$	40
4. Invariance homotopique	40
5. Le groupe fondamental	41
6. Quelques surfaces	45
Chapitre 3. Théorie des groupes combinatoires	53
1. Groupes libres	53
2. Présentations de groupes	55
3. Le graphe de Cayley	56
4. Le produit libre	58

5. Amalgames ou pushouts	60
Chapitre 4. Le Théorème de Seifert-van Kampen	63
1. Le groupe fondamental d'un recollement	63
2. Espaces bien pointés	70
3. Groupe fondamental d'un wedge	71
4. Groupe fondamental et attachement de cellule	73
5. Groupe fondamental et attachement d'une cellule standard	76
6. La classification des surfaces	78
7. Abélianisation et caractéristique d'Euler	84
Chapitre 5. Revêtements	89
1. Définitions et exemples	89
2. Morphismes de revêtements	91
3. Relèvement de chemins et d'homotopies	92
4. Revêtements et actions de groupes	96
5. Propriétés de relèvement	97
6. Le revêtement universel	99
7. Monodromie	106
8. Correspondance galoisienne	108
9. Groupes d'automorphismes	109
10. Revêtements galoisiens	111
11. Revêtements et action de groupes	115
Chapitre 6. Un coup d'oeil en avant	119
1. Les groupes d'homotopie supérieurs	119
2. Les fibrations	120
3. L'invariant de Hopf	122

## Introduction

Ce cours de topologie est la suite logique du cours de topologie générale et espaces métriques. Il est constitué de quatre chapitres. Dans le premier on étudie la topologie quotient qui permet de construire de nouveaux espaces topologiques en identifiant certains points entre eux, en écrasant des sous-espaces, ou en attachant un espace à un autre espace. La souplesse de la topologie fait que ces quotients sont moins homogènes que les quotients de nature algébrique que l'on connaît déjà et font apparaître des différences qui apportent à ce sujet son intérêt, mais aussi une certaine complexité. Ces idées sont abordées dans la Section 1.

Dans le deuxième chapitre nous complétons nos connaissances de théorie des groupes pour avoir en mains les outils nécessaires à la description des groupes fondamentaux des espaces topologiques. Nous travaillerons avec des groupes libres et introduisons la notion de présentation d'un groupe arbitraire, par générateurs et relations. L'idée est de donner une liste (minimale si possible) de générateurs et surtout des relations qu'ils vérifient. Par exemple le groupe  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  est engendré par les éléments  $x = (1; 0)$  et  $y = (0; 1)$ . Avec la notation multiplicative ils vérifient une relation, celle de commuter entre eux puisque le groupe est commutatif :  $xy = yx$  et on définit alors le relateur  $xyx^{-1}y^{-1}$  pour dire que la relation  $xyx^{-1}y^{-1} = 1$  est satisfaite. Cette relation engendre en fait toutes les autres relations et on obtient une présentation du groupe abélien libre à deux générateurs :  $\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ .

Dans le troisième chapitre nous revenons sur la notion d'homotopie entre chemins et la généralisons à des applications continues arbitraires. Le résultat central de cette partie est le Théorème de Seifert et van Kampen qui donne des conditions assez générales et très utiles dans la pratique permettant d'identifier le groupe fondamental d'un pushout d'espaces avec le pushout de leurs groupes fondamentaux ! Ces pushouts d'espaces  $X \leftarrow A \rightarrow Y$  sont précisément obtenus en recollant les espaces  $X$  et  $Y$  le long de leur "partie commune" donnée par l'image de  $A$  et le pushout

des groupes fondamentaux  $\pi_1 X \leftarrow \pi_1 A \rightarrow \pi_1 Y$  sera décrit de manière efficace grâce à la théorie des groupes combinatoires développée dans le chapitre précédent. Ce résultat admet une ribambelle de conséquences, certaines très générales concernent l'attachement d'une cellule et son effet sur le  $\pi_1$ , d'autres très concrètes, ce sera le cas du calcul du groupe fondamental de toute surface, qui permet d'obtenir une classification complètes des surfaces.

Dans le quatrième et dernier chapitre nous étudions les revêtements. Sans que le vocabulaire ait été utilisé, l'application exponentielle  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  est ce qu'on appelle un revêtement universel et ceci permet d'identifier le groupe fondamental du cercle, avec le groupe des automorphismes de  $\mathbb{R}$  compatibles avec l'exponentielle, i.e., les translations  $+n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Nous étudierons les revêtements, établirons un résultat d'existence pour des espaces dotés d'une topologie "raisonnable" et terminerons avec un théorème de correspondance galoisienne qui donne une bijection entre sous-groupes du groupe fondamental et revêtements. Dans le cas du cercle, qui est connu, cela se traduit précisément par le fait qu'il existe un revêtement à  $n$  feuillets du cercle – l'application  $z \mapsto z^n$  – pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

### 1. 3Blue1Brown

J'aimerais commencer ce cours de topologie en vous montrant une magnifique vidéo de 3Blue1Brown que vous connaissez peut-être. Son titre est "Who cares about topology?" et il illustre comment de nombreuses idées que je vais essayer d'expliquer dans ce cours peuvent être appliquées de manière surprenante pour résoudre un problème apparemment sans lien avec la topologie. L'une des constructions qui est décrite est celle d'un quotient, ce sera le sujet du premier chapitre de ce cours et un outil fondamental pour obtenir de nouveaux espaces topologiques à partir d'espaces connus.

**CONJECTURE 1.1.** La *conjecture de Toeplitz* ou *conjecture du carré inscrit* prédit l'existence sur toute courbe de Jordan dans le plan de quatre points qui forment un carré.

Otto Toeplitz est un mathématicien allemand (1881 - 1940) ayant travaillé à Göttingen au début du siècle lorsque Hilbert, Klein, Minkowski, Courant y étaient.

Nommé à Kiel, puis à Bonn, il fut forcé d'émigrer à Jérusalem en 1939 où il mourut de la tuberculose l'année suivante.

Cette conjecture est encore ouverte de nos jours, du moins sous sa forme la plus générale, mais il semblerait que le cas lisse ait été résolu pendant le confinement du printemps 2020 par Greene et Lobb, dans un petit article de quatre pages (Cyclic quadrilaterals and smooth Jordan curves) que l'on trouve sur MathArXiv. Voir aussi l'article de vulgarisation très bien écrit :

<https://www.quantamagazine.org/new-geometric-perspective-cracks-old-problem-about-rectangles-20200625/>

Nous verrons dans le film une solution d'une version plus faible, le problème du *rectangle inscrit*, démontré par Herbert Vaughan en 1977. Son idée est d'utiliser la caractérisation d'un rectangle par le fait que les diagonales de même longueur se coupent en leur milieu. Il s'agit donc de trouver deux paires de points sur la courbe qui déterminent des segments de même longueur se coupant en leur milieu.

Pour cela on définit une fonction qui associe à toute paire de points de la courbe  $C$  son point milieu dans le plan et on ajoute une troisième coordonnée qui est donnée par la longueur  $d$  de ce segment. Autrement dit nous avons construit une fonction  $f: C \times C \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée en dollars par la formule suivante :

$$(x_1, y_1; x_2, y_2) \mapsto \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right)$$

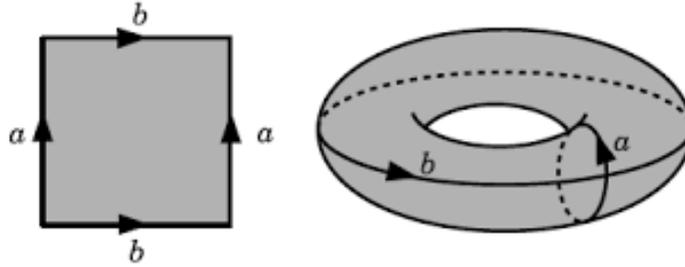
L'image de cette fonction décrit une surface  $S$  au-dessus du plan.

LEMME 1.2. *La fonction  $f$  est continue et  $f(x, x) = (x, 0)$ .*

De fait nous devons être un peu plus précis car nous ne sommes pas intéressés par des éléments de  $C \times C$ , mais des paires non ordonnées puisque le segment déterminé par deux points  $A$  et  $B$  de la courbe est le même si nous choisissons  $B$  et  $A$ . Le choix d'une paramétrisation  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la courbe fermée  $C$  permet de penser à un point de la courbe comme étant un nombre réel compris entre 0 et 1. Chaque nombre correspond exactement à un point de  $C$  et vice-versa, sauf aux extrémités puisque la courbe est fermée : 0 et 1 correspondent au même point.

De même une paire de points de  $C$  correspond alors à une paire de points du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ , mais il ne faut pas oublier de faire les identifications  $(0, t) = (1, t)$

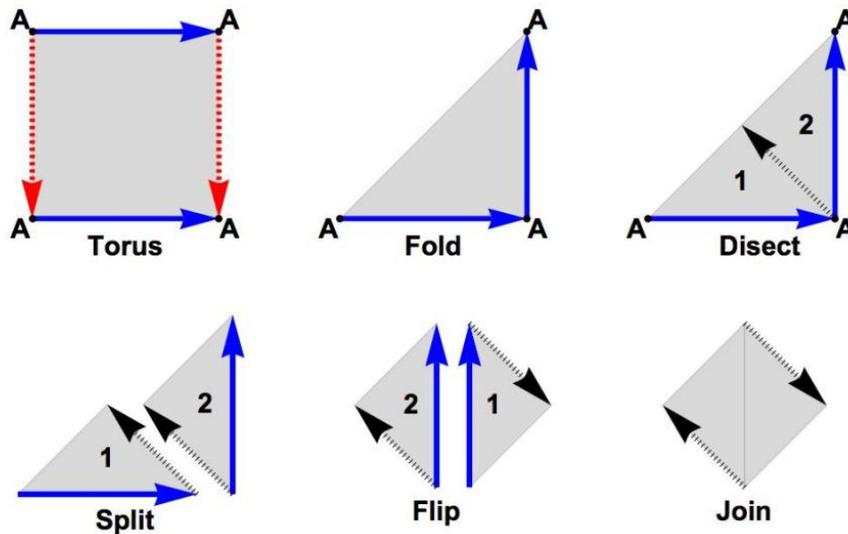
et  $(s, 0) = (s, 1)$  pour tous nombres réels  $0 \leq s, t \leq 1$ . Ceci définit le tore, un espace muni de la topologie quotient héritée du carré.



Comme les paires qui nous intéressent sont non-ordonnées, nous voulons identifier encore le point  $(s, t)$  avec  $(t, s)$ . Autrement dit nous voulons plier le carré en deux le long de la diagonale pour ne garder qu'un triangle.

**PROPOSITION 1.3.** *La surface qui paramétrise le choix de paires de points non ordonnés d'une courbe fermée est le ruban de Moebius.*

**DÉMONSTRATION.** Nous devons identifier les cathètes du triangle rectangle isocèle puisque  $(s, 0) = (s, 1)$  et que ce point du haut du carré a été identifié lors du pliage avec  $(1, s)$ . Pour mieux visualiser la surface ainsi obtenue il est plus agréable de couper le triangle par sa hauteur, comme ci-dessous, pour d'abord identifier les cathètes et obtenir un petit carré, avant de recoller la hauteur.



Il s'agit effectivement d'un carré dont on identifie deux côtés opposés, l'un étant parcouru de gauche à droite et l'autre de droite à gauche : □

Nous oublions maintenant la paramétrisation concrète de ce ruban de Moebius. Soit  $M$  le ruban de Moebius et  $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  la fonction induite par  $f$  (par passage au quotient).

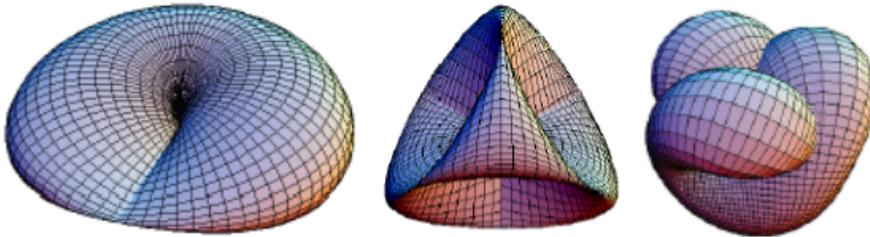
PROPOSITION 1.4. *La fonction  $\bar{f}$  est continue et envoie  $\partial M$  sur la courbe  $C$ .*

DÉMONSTRATION. Le bord de  $M$  correspond à la diagonale du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  et on conclut par le Lemme 1.2.  $\square$

THÉORÈME 1.5. *Il existe sur toute courbe de Jordan dans le plan quatre points qui forment un rectangle.*

DÉMONSTRATION. Nous cherchons deux paires de points dont les diagonales se coupent en leur milieu et qui ont même longueur. Autrement dit nous cherchons deux points  $m, n$  de  $M$  tels que  $\bar{f}(m) = \bar{f}(n)$ .

Considérons la surface dans  $\mathbb{R}^3$  obtenue à partir de l'image de  $\bar{f}$  en ajoutant l'intérieur de la courbe  $C$ . Cette surface fermée et sans bord est obtenue topologiquement en attachant à un ruban de Moebius un disque, l'identification étant faite "bord à bord". Cette surface est appelée *plan projectif* et connue comme  $\mathbb{R}P^2$ .



Or, le plan projectif n'admet pas de plongement dans  $\mathbb{R}^3$  comme "on le voit" sur les différentes immersions proposées ci-dessus...  $\square$

## 2. Espaces topologiques

Ce semestre nous travaillons avec des espaces topologiques et des applications continues entre deux objets de ce type. Nous rappelons la définition d'espace topologique et fixons les notations que nous utiliserons dorénavant. Les notions de ce document sont considérées comme étant acquises avant le début du cours et constituent donc des prérequis.

DÉFINITION 2.1. Un *espace (topologique)* est un ensemble  $X$  muni d'une *topologie*  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  dont les éléments sont appelés *ouverts* de la topologie, telle que

- (1) L'ensemble vide et  $X$  sont ouverts.
- (2) Une intersection finie d'ouverts est ouverte.
- (3) Une réunion arbitraire d'ouverts est ouverte.

On écrit parfois  $(X, \mathcal{T})$  pour souligner l'importance de la topologie, mais lorsque le contexte indique clairement quelle topologie est utilisée, on écrira simplement  $X$  et on dira que  $X$  est un espace. Le complémentaire d'un ouvert est appelé *fermé*.

EXEMPLE 2.2. La topologie discrète est définie par  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  et si  $X$  est un espace métrique, alors la topologie métrique a pour ouverts les réunions de boules ouvertes.

Parmi les propriétés de séparation que vous avez étudiées nous rencontrerons surtout celle de Hausdorff.

DÉFINITION 2.3. Un espace  $X$  est de *Hausdorff*, ou simplement *séparé*, si deux points distincts  $x$  et  $y$  peuvent toujours être séparés par des voisinages ouverts  $U$  et  $V$ , i.e.  $x \in U$ ,  $y \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

On appelle  $U$  un *voisinage ouvert* de  $x$  et en général un voisinage  $A$  d'un point  $x$  est un sous-espace de  $X$  qui contient un voisinage ouvert de  $x$ .

DÉFINITION 2.4. Soient  $X, Y$  deux espaces. Une application  $f: X \rightarrow Y$  est *continue* si  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$  pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ .

Une application qui envoie les ouverts, resp. les fermés, de  $X$  sur des ouverts, resp. fermés, de  $Y$  est dite *ouverte*, resp. *fermée*. On vérifie par exemple le critère suivant en montrant que les hypothèses impliquent que l'application est fermée.

PROPOSITION 2.5. *Une application bijective d'un espace compact vers un espace séparé est un homéomorphisme.*

**3. Notations**

Dès maintenant toutes les applications sont continues, sauf mention du contraire.

On note

- (a) Le singleton est l'espace  $\star$  n'ayant qu'un seul point, i.e.  $\{\star\}$ , muni de la topologie ... discrète.
- (b) L'espace  $D^n$  est la boule unité fermée (disque) dans  $\mathbb{R}^n$  pour la métrique euclidienne usuelle. On notera parfois  $e^n$  pour un espace homéomorphe à  $D^n$ . L'intérieur  $\overset{\circ}{D}^n$  ou  $\overset{\circ}{e}^n$  est donc une boule ouverte.
- (c) Le bord  $\partial D^n$  de  $D^n$  est la sphère unité  $S^{n-1}$ .
- (d) On utilise le symbole  $\cong$  pour les isomorphismes,  $\approx$  pour les homéomorphismes et  $\simeq$  pour les équivalences d'homotopie entre espaces ou les homotopies entre applications.

On aime utiliser des symboles différents pour bien distinguer les catégories dans lesquelles on travaille. Il est vrai que chacun des trois symboles de (d) désigne en fait un isomorphisme (dans une catégorie algébrique, celle des groupes ou des anneaux, dans la catégorie des espaces topologiques, ou la catégorie homotopique, nous y reviendrons).



## Chapitre 1

### Les espaces quotients

Si  $X$  est un espace et  $q: X \rightarrow Y$  est une application ensembliste surjective, on peut toujours munir  $Y$  d'une topologie *quotient*. Dans ce chapitre nous proposons plusieurs points de vue sur ce type de construction et étudions quelles propriétés (de séparation, de compacité) de  $X$  se transmettent au quotient.

#### 1. La topologie quotient

On considère dans cette section un espace (topologique)  $X$  et une surjection ensembliste  $q: X \rightarrow Y$ .

DÉFINITION 1.1. Un sous-ensemble  $U \subset Y$  est un ouvert de la *topologie quotient* sur  $Y$  si et seulement si  $q^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$ .

Quand  $Y$  est muni de la topologie quotient via  $q$  on dira que l'application  $q$  est une application quotient, ou simplement un quotient, et que  $Y$  est un espace quotient de  $X$ , ou simplement un quotient.

REMARQUE 1.2. On peut également définir la topologie quotient sur  $Y$  en caractérisant les fermés  $F$  de  $Y$  comme étant exactement ceux dont la préimage  $q^{-1}(F)$  est fermée dans  $X$ .

LEMME 1.3. *La définition des ouverts de  $Y$  munit  $Y$  d'une topologie.*

DÉMONSTRATION. En exercice. □

EXEMPLE 1.4. Soit  $I = [0; 1]$  l'intervalle fermé muni de la topologie métrique (induite de celle de  $\mathbb{R}$ ) et  $Y = ]0; 1[ \coprod \{\star\}$  l'espace dont les points sont ceux de l'intervalle ouvert,  $0 < y < 1$ , et un point supplémentaire noté  $\star$ . On définit  $q: I \rightarrow Y$  par la formule

$$q(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \star & \text{sinon} \end{cases}$$

La topologie quotient sur  $Y$  en fait un espace homéomorphe au cercle. Explicitement on peut définir un homéomorphisme  $f: S^1 \rightarrow Y$  par  $e^{2\pi it} \mapsto t$  pour  $t \neq 0$  et  $f(1) = \star$ .

Dans le début de cette section nous sommes partis d'une surjection ensembliste et nous avons défini une topologie sur le quotient. Parfois on a deux espaces munis d'une topologie connue et on dispose d'une application (continue)  $q: X \rightarrow Y$ . On se demande quand cette application est un quotient, c'est-à-dire quand la topologie de  $Y$  coïncide avec la topologie quotient.

**PROPOSITION 1.5.** *Si  $q: X \rightarrow Y$  est une application surjective, continue et ouverte (ou fermée), alors  $q$  est un quotient.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $U \subset Y$ . Si  $U$  est ouvert, alors  $q^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$  par continuité. Réciproquement supposons que  $q^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X$ . Alors l'image par  $q$  est ouverte parce que  $q$  est ouverte. Comme  $q$  est surjective,  $q(q^{-1}(U)) = U$ , si bien que  $U$  est ouvert.

Lorsque  $q$  est une application fermée, on conclut en montrant de la même façon que  $Y \setminus U = q(X \setminus q^{-1}(U))$  est fermé.  $\square$

**EXEMPLE 1.6.** On définit  $q: [0, 3] \rightarrow [0, 2]$  en contractant l'intervalle  $[1, 2]$  sur un point. Explicitement

$$q(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ t - 1 & \text{si } 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

Alors  $q$  est une application quotient qui n'est pas ouverte puisque  $q(]1, 2]) = \{1\}$ .

La preuve du résultat suivant est claire. Cela sera utile pour construire des quotients en plusieurs temps.

**PROPOSITION 1.7.** *Si  $p: X \rightarrow Y$  et  $q: Y \rightarrow Z$  sont deux quotients, alors  $q \circ p$  aussi est un quotient.*  $\square$

Nous avons introduit la topologie quotient par une définition certes raisonnable, mais qui était parachutée sans motivation préalable. Le théorème ci-dessous caractérise cette topologie et rend la définition naturelle. Il ajoute ensuite une propriété très pratique qui donne la motivation manquante.

**THÉORÈME 1.8.** *Soit  $X$  un espace topologique et  $q: X \rightarrow Y$  une application ensembliste surjective. La topologie quotient sur  $Y$  est la topologie la plus fine qui rend  $q$  continue. De plus, si  $Y$  est muni de la topologie quotient, alors une application  $g: Y \rightarrow Z$  est continue si et seulement si la composée  $g \circ q$  est continue.*

**DÉMONSTRATION.** L'affirmation sur la finesse de la topologie est claire puisque si  $q$  est continue, alors  $q^{-1}(U)$  est ouvert pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ .

Pour montrer la deuxième propriété, il suffit de prouver que si  $g \circ q$  est continue, alors  $g$  aussi est continue (car la composition de deux applications continues est toujours continue). Soit  $V \subset Z$  un ouvert. Alors  $(g \circ q)^{-1}(V) = q^{-1}(g^{-1}(V))$  est un ouvert de  $X$ . Par définition de la topologie quotient on conclut que  $g^{-1}(V)$  est un ouvert de  $Y$ . Ainsi  $g$  est continue.  $\square$

**EXEMPLE 1.9.** Soit  $C$  le cercle unité dans le plan donné en coordonnées par

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

On définit une fonction  $q: \mathbb{R} \rightarrow C$  en posant  $q(t) = e^{2i\pi t}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Alors  $q$  est continue, surjective et ouverte, c'est donc un quotient.

Je ferai parfois référence au résultat suivant sous le nom de *critère de compacité*.

**PROPOSITION 1.10.** *Soit  $q: X \rightarrow Y$  une application quotient. Si  $X$  est compact,  $Y$  aussi est compact.*

**DÉMONSTRATION.** L'image d'un compact par une application continue est toujours compacte.  $\square$

## 2. Quotient par une relation

Il est souvent utile de décrire un espace quotient en donnant les points qui sont identifiés par le biais d'une relation d'équivalence. Lorsque  $q: X \rightarrow Y$  est une surjection, on peut toujours lui associer une relation définie par  $x \sim x'$  si et seulement si  $q(x) = q(x')$ . Cette nouvelle manière de présenter les quotients est donc équivalente à la manière originale introduite dans la section précédente.

DÉFINITION 2.1. Soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur un espace  $X$  et  $q: X \rightarrow X/\sim$  la projection canonique. On appelle  $X/\sim$  l'espace quotient de  $X$  par  $\sim$  lorsque ce dernier est muni de la topologie quotient.

EXEMPLE 2.2. Le cercle décrit dans l'Exemple 1.9 par une paramétrisation explicite dans le plan peut simplement être décrite comme quotient de l'intervalle  $[0, 1]$  par la relation  $\sim$  définie par  $s \sim t$  si et seulement si  $s = t$  ou  $s, t \in \{0, 1\}$ .

Les quotients d'un intervalle sont ainsi décrits comme un bout de ficelle où certains points sont identifiés (en les collant). Il n'est plus nécessaire de décrire l'espace quotient par une paramétrisation dans le plan ou l'espace. On a la propriété universelle suivante dans ce contexte.

PROPOSITION 2.3. Soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur un espace  $X$  et l'application quotient  $q: X \rightarrow X/\sim$ . Alors pour toute application  $f: X \rightarrow Y$  telle que  $x \sim x'$  implique  $f(x) = f(x')$ , il existe une unique application  $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$  avec  $\bar{f} \circ q = f$ .

DÉMONSTRATION. Puisqu'on souhaite avoir  $\bar{f} \circ q = f$  il faut poser  $\bar{f}([x]) = f(x)$ , ce qui montre l'unicité. L'hypothèse " $x \sim x'$  implique  $f(x) = f(x')$ " permet de déduire que  $\bar{f}$  est bien définie de manière ensembliste. Elle est continue par le Théorème 1.8 puisque la composition  $\bar{f} \circ q = f$  est continue.  $\square$

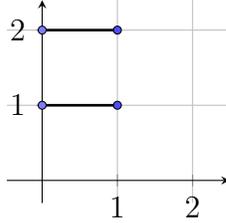
Un cas particulier important est la construction suivante, obtenue en écrasant un sous-espace.

DÉFINITION 2.4. Soit  $A \subset X$  un sous-espace. Le *collapse*  $X/A$  est l'espace quotient obtenu de  $X$  par la relation d'équivalence  $x \sim y$  si et seulement si  $x = y$  ou  $x, y \in A$ .

EXEMPLE 2.5. Le cercle décrit dans l'Exemple 1.9 est le collapse  $[0, 1]/\{0, 1\}$ .

Lorsqu'on se donne une famille d'espaces, il est possible qu'en tant qu'espaces ils ne soient pas disjoints. Pour cela on introduit pour tout espace  $X_\alpha$  un espace  $X_\alpha \times \{\alpha\}$  qui est homéomorphe, car c'est le produit avec un singleton. De cette façon le nouvel espace remplace  $X_\alpha$  mais porte avec lui son indice qui distingue ses points de ceux de tous les autres espaces.

EXEMPLE 2.6. Si on choisit  $X_1 = X_2 = I$ , et qu'on souhaite malgré tout décrire une réunion disjointe de deux intervalles, on pourra remplacer  $X_1$  par  $I \times \{1\}$  et  $X_2$  par  $I \times \{2\}$ , de sorte que la réunion de ces nouveaux intervalles soit disjointe :



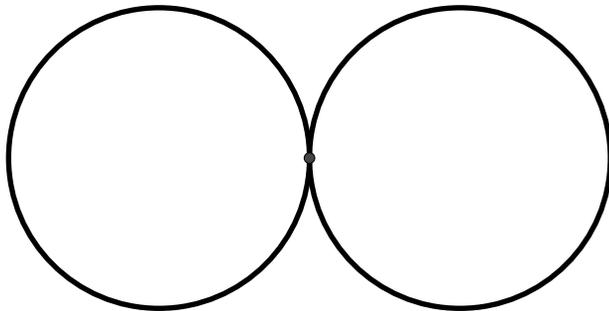
DÉFINITION 2.7. Soit  $A$  un ensemble et pour tout  $\alpha \in A$  un espace  $X_\alpha$ . La réunion disjointe  $\coprod X_\alpha$  est l'espace topologique  $\bigcup X_\alpha \times \{\alpha\}$ . Les ouverts de cet espace sont les réunions d'ouverts des  $X_\alpha \times \{\alpha\}$ .

Lorsqu'on identifie les points de base de chacun des espaces d'une famille d'espaces  $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$  on obtient un "bouquet" d'espaces.

DÉFINITION 2.8. Soit  $A$  un ensemble et pour tout  $\alpha \in A$  un espace pointé  $(X_\alpha, x_\alpha)$ . Le wedge  $\bigvee X_\alpha$  est le quotient  $\coprod X_\alpha / \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ .

On peut montrer que le type d'homotopie ne dépend pas des points de base choisis pour autant qu'ils se trouvent dans la même composante connexe par arcs lorsque les espaces sont "gentils". Ceci justifie l'abus de notation consistant à ne pas mentionner les points de base.

EXEMPLE 2.9. Le wedge de deux cercles  $S^1 \vee S^1$  est un 8.



D'autres exemples de quotients sont importants pour ce cours dans lequel ils vont apparaître de manière récurrente.

EXEMPLE 2.10. Le collapse  $D^n/S^{n-1}$  est homéomorphe à la sphère  $S^n$ . Visuellement on peut bien se convaincre de l'exactitude de cette affirmation pour  $n = 2$ , le disque dont on collapse le bord en un point donne bien une sphère. Une jolie vidéo se trouve aussi ici : [https://www.youtube.com/watch?v=IVkPggC\\_2R8](https://www.youtube.com/watch?v=IVkPggC_2R8)

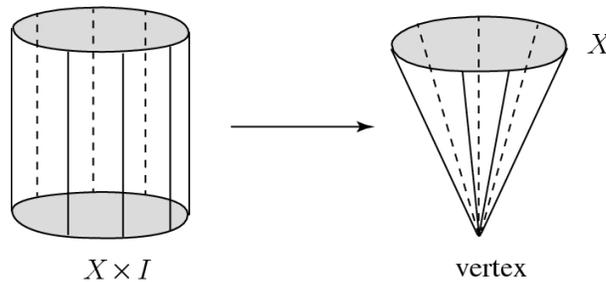
Exhibons l'homéomorphisme pour le cas général. Soit  $f: D^n \rightarrow S^n$  l'application définie par

$$\mathbf{x} \mapsto \begin{cases} (2\mathbf{x}, \sqrt{1 - \|2\mathbf{x}\|^2}) & \text{si } \|\mathbf{x}\| \leq 1/2 \\ ([4 - 4\|\mathbf{x}\|] \mathbf{x}, -\sqrt{1 - [4 - 4\|\mathbf{x}\|]^2 \|\mathbf{x}\|^2}) & \text{si } \|\mathbf{x}\| > 1/2 \end{cases}$$

Cette application est définie de sorte à envoyer le cercle de rayon  $1/2$  sur l'équateur de  $S^n$ , le disque intérieur sur l'hémisphère nord et l'anneau extérieur sur l'hémisphère sud. On calcule également que tout point  $\mathbf{x}$  du bord de  $D^n$ , donc de norme 1, est envoyé sur  $(\mathbf{0}, -1)$ . Cette application passe donc au quotient et induit une application  $\bar{f}: D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$ . C'est une bijection continue dont la source est un espace compact par la Proposition 1.10 vers un espace séparé. C'est un homéomorphisme.

Un autre exemple dans le même style est l'identification du sommet ou du bas d'un cylindre. Nous généraliserons cette construction immédiatement.

EXEMPLE 2.11. Soit  $S^1 \times I$  un cylindre de hauteur 1 et de base circulaire. Alors le quotient  $S^1 \times I/S^1 \times 0$  est homéomorphe à un disque  $D^2$  :



La même stratégie que ci-dessus s'applique à la fonction  $f(x, t) = tx$  pour  $x \in S^1$  et  $t \in I$ .

DÉFINITION 2.12. Soit  $X$  un espace et  $X \times I$  le *cylindre* sur  $X$ . Le *cône* sur  $X$  est l'espace quotient  $CX = X \times I/X \times 0$ .

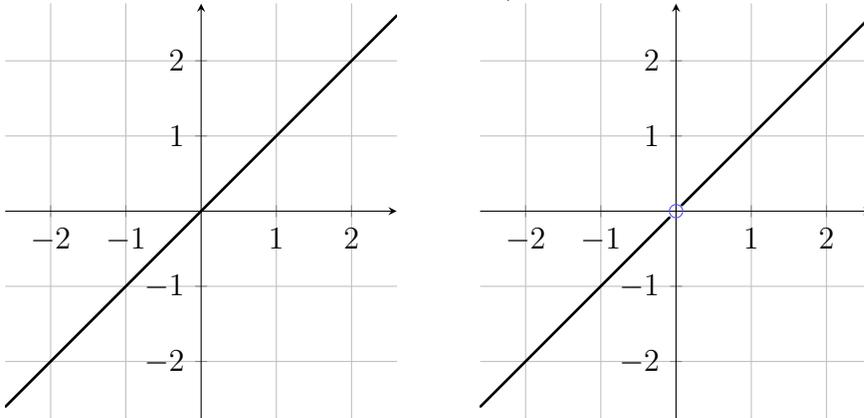
### 3. Quotient et axiomes de séparation

En général le quotient d'un espace séparé n'est pas séparé. Nous avons déjà rencontré un exemple dans une série d'exercices. Un autre exemple classique est la *droite à deux origines*.

EXEMPLE 3.1. A partir de deux copies de  $\mathbb{R}$  on identifie chaque point  $x$  de la première copie avec le point  $x$  correspondant dans la deuxième copie, sauf les “zéros”, qu'on ne peut séparer par des ouverts.



Plus formellement, considérons  $X = \mathbb{R} \times \{0; 1\}$  et la relation  $\sim$  est définie par  $(s, k) \sim (t, \ell)$  si et seulement si  $s = t$  et  $s \neq 0$  quand  $k \neq \ell$ . Si on considère le graphe de la relation d'équivalence  $\Gamma \subset (\mathbb{R} \amalg \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \amalg \mathbb{R})$  on voit qu'il n'est pas fermé (les copies  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  contiennent une droite diagonale, mais les deux autres contiennent une droite privée d'un point) :



On rappelle que le graphe de la relation  $\sim$  est l'ensemble des paires  $(x, x') \in X \times X$  telles que  $x \sim x'$ . La clôture du graphe de la relation d'équivalence est en fait une condition nécessaire pour que le quotient soit séparé. On (re)montre d'abord un critère de séparabilité très utile, déjà vu lors de l'étude de la séparabilité dans le cours sur les espaces métriques.

LEMME 3.2. *Un espace  $X$  est séparé si et seulement si la diagonale  $\Delta$  est fermée dans  $X \times X$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $(x, y) \in X \times X$  un point ne se trouvant pas sur la diagonale (i.e.  $x \neq y$ ). Considérons  $x \in U$  et  $y \in V$  deux voisinages ouverts. Alors  $U \cap V = \emptyset$  si et seulement si  $U \times V \cap \Delta = \emptyset$ . Ainsi  $U$  et  $V$  séparent les points  $x$  et  $y$  si et seulement si  $U \times V$  est un voisinage ouverte de  $(x, y)$  pour la topologie produit qui ne rencontre pas la diagonale.  $\square$

Une manière un peu alambiquée de voir le résultat ci-dessus est le suivant. La relation triviale  $x \sim x$  a pour graphe la diagonale  $\Delta$  de  $X \times X$ . Si le quotient  $X/\sim = X$  est séparé alors  $\Delta$  doit être fermé.

PROPOSITION 3.3. *Soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur un espace  $X$ . Si  $X/\sim$  est séparé, alors le graphe  $\Gamma$  de la relation est fermé dans  $X \times X$ .*

DÉMONSTRATION. Si le quotient est séparé, la diagonale  $\Delta \subset (X/\sim) \times (X/\sim)$  est fermée. Or la préimage de  $\Delta$  par  $q \times q: X \times X \rightarrow (X/\sim) \times (X/\sim)$  est précisément le graphe  $\Gamma$ , constitué des paires  $(x, y)$  telles que  $\bar{x} = \bar{y}$ , i.e.  $x \sim y$ . On conclut par continuité de  $q \times q$  que  $\Gamma$  est fermé.  $\square$

Voici aussi un critère qui garantit que le quotient est séparé (mais qui ne donne pas une condition nécessaire).

DÉFINITION 3.4. Soit  $q: X \rightarrow Y$  une application quotient. On dit que  $A \subset X$  est saturé ou  $q$ -saturé si  $A = q^{-1}(q(A))$ . Pour  $B \subset X$  on appelle  $q^{-1}(q(A))$  la saturation de  $A$  par l'application  $q$ .

PROPOSITION 3.5. *Soit  $\sim$  une relation d'équivalence sur un espace  $X$  séparé. Si  $q^{-1}(q(x))$  est compact dans  $X$  pour tout  $x \in X$  et que  $q^{-1}(q(F))$  est fermé dans  $X$  pour tout fermé  $F \subset X$ , alors  $X/\sim$  est séparé.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  deux points distincts de  $X/\sim$ . Par hypothèse les préimages  $q^{-1}(\bar{x}) = q^{-1}(q(x))$  et  $q^{-1}(\bar{y})$  sont compactes et disjointes. Il existe donc des voisinages  $U$  et  $V$ , ouverts et disjoints dans  $X$ , qui séparent ces compacts car  $X$  est séparé.

On doit maintenant rendre  $q(U)$  et  $q(V)$  disjoints. Soient  $E = X \setminus U$  et  $F = X \setminus V$  les complémentaires fermés. Par hypothèse les saturations  $E' = q^{-1}(q(E))$  et  $F' = q^{-1}(q(F))$  sont fermés, si bien que les complémentaires  $U' = X \setminus q^{-1}(q(E))$

et  $V' = X \setminus q^{-1}(q(E))$  sont ouverts. Comme l'espace  $X$  se décompose en réunion disjointe de classes d'équivalence,  $U'$  et  $V'$  sont saturés, contiennent  $q^{-1}(\bar{x})$  et  $q^{-1}(\bar{y})$  respectivement, dont ils forment des voisinages. Comme  $U' \subset U$  et  $V' \subset V$  ils sont disjoints.

Puisque  $U' = q^{-1}(q(U'))$  (par saturation), la définition de la topologie quotient garantit que  $q(U')$  est ouvert dans le quotient. Le même raisonnement s'applique à  $q(V')$ .

Pour terminer on contrôle que ces ouverts sont disjoints. Supposons qu'il existe  $u' \in U'$  et  $v' \in V'$  tels que  $q(u') = q(v')$ . Alors  $u' \in q^{-1}(q(v')) \subset q^{-1}(q(V')) = V'$ , ce qui est absurde puisque  $U' \cap V' = \emptyset$ .  $\square$

EXEMPLE 3.6. L'application exponentielle  $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  présente le cercle, un espace séparé, comme quotient de la droite réelle. Comme les saturations de points ne sont pas compactes (par exemple  $q^{-1}(q(0)) = \mathbb{Z}$ ), le critère ne s'applique pas. Par contre on peut restreindre  $q$  à un "domaine fondamental" pour s'y ramener puisque  $e' = e|_{[0;1]} : [0;1] \rightarrow S^1$  présente le cercle comme quotient d'une application qui vérifie les conditions de la Proposition 3.5. On remarque que  $e^{-1}(U) \cap [0;1] = e'^{-1}(U)$  et tout voisinage de  $1 \in S^1$  contient l'image d'un intervalle  $] - \varepsilon; \varepsilon[$ .

COROLLAIRE 3.7. *Soit  $A \subset X$  un sous-espace compact d'un espace  $X$  séparé. Alors  $X/A$  est séparé.*

DÉMONSTRATION. La préimage d'un point par l'application quotient  $q : X \rightarrow X/A$  est soit un singleton, soit  $A$ . La première condition de la Proposition 3.5 est donc vérifiée. De plus, si  $F \subset X$  est fermé, alors  $q^{-1}(q(F)) = F$  lorsque  $F \cap A = \emptyset$ , qui est fermé et sinon  $q^{-1}(q(F)) = F \cup A$ , qui est également fermé, car le compact  $A$  est fermé dans l'espace séparé  $X$ .  $\square$

EXEMPLE 3.8. On définit une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}^2$  comme suit :  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  s'il existe  $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{a}$ . Le quotient est homéomorphe à un tore, un joli espace compact et séparé, mais qui ne vérifie ni le critère de compacité, ni celui de séparabilité... On retrouvera cet exemple dans les exercices et on pourra conclure en identifiant un domaine fondamental.

L'importance de la notion de saturation, qui semble peut-être artificielle au premier coup d'oeil, vient du fait qu'elle apparaît naturellement lors de la comparaison des quotients. Nous avons vu en effet qu'une application quotient  $q: X \rightarrow Y$  n'est pas nécessairement ouverte, mais par contre elle envoie des ouverts saturés sur des ouverts par définition de la topologie quotient. De fait cette propriété caractérise la topologie quotient.

**PROPOSITION 3.9.** *Soit  $q: X \rightarrow Y$  une application continue et surjective. Alors  $q$  est un quotient si et seulement si  $q(U)$  est un ouvert de  $Y$  pour tout  $U$  ouvert saturé de  $X$ .*

**DÉMONSTRATION.** Il reste à montrer une implication. On suppose que  $q(U)$  est un ouvert de  $Y$  pour tout  $U$  ouvert saturé de  $X$ . Soit  $V \subset Y$  un sous-ensemble et on suppose que  $U = q^{-1}(V)$  est ouvert. On observe que  $U$  est saturé puisqu'il contient par construction des classes d'équivalence entières (si  $q(x) = q(x')$ , alors  $x$  et  $x'$  sont tous deux soit dans  $U$ , soit en dehors de  $U$ ). Comme  $V = q(U)$ , c'est l'image d'un ouvert saturé, il est donc ouvert.  $\square$

Nous terminons cette section avec des exemples d'espaces quotient qui jouent un rôle important dans l'histoire de la topologie algébrique. Nous avons travaillé avec le plan projectif réel dans une série d'exercices et vu comment le définir comme un espace de droites dans l'espace. Il est possible et historiquement adéquat de généraliser cette approche, mais nous préférons introduire les espaces projectifs directement comme quotients de sphères par la relation "antipodale".

**DÉFINITION 3.10.** *L'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^n$  est le quotient  $S^n / \sim$  où  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  si et seulement si  $\mathbf{x} = \pm \mathbf{y}$ .*

**EXEMPLE 3.11.** Ainsi  $\mathbb{R}P^0$  est un point puisque c'est le quotient de la sphère  $S^0$  dans lequel on identifie  $+1$  et  $-1$ . L'espace  $\mathbb{R}P^1$  est également facile à identifier, il est homéomorphe à  $S^1$ , et  $\mathbb{R}P^2$  est l'espace décrit dans la vidéo de 3Blue1Brown.

**PROPOSITION 3.12.** *L'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^n$  est compact et séparé.*

DÉMONSTRATION. La compacité suit de la Proposition 1.10 car  $S^n$  est compact. Comme  $S^n$  est séparé et que  $q^{-1}(q(F)) = -F \cup F$  est compact pour tout fermé  $F \subset S^n$  on conclut par le critère de séparabilité (Proposition 3.5).  $\square$

La sphère  $S^n$  est la sphère unité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et les inversibles de norme 1 de  $\mathbb{R}$  sont  $\pm 1$ . Nous travaillons avec les nombres complexes  $\mathbb{C}$  maintenant et le groupe  $S^1$  des nombres complexes de norme 1 remplace  $\pm 1$ . La sphère unité  $S^{2n+1}$  est vue comme sous-espace de  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

DÉFINITION 3.13. L'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  est le quotient  $S^{2n+1}/\sim$  où  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  si et seulement s'il existe un nombre complexe  $a \in S^1$  tel que  $\mathbf{x} = a\mathbf{y}$ .

Explicitement  $a$  agit sur  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n+1})$  par  $a \cdot \mathbf{y} = (ay_1, \dots, ay_{n+1})$ . On peut montrer par exemple que  $\mathbb{C}P^1$  est homéomorphe à la sphère  $S^2$ , ce qui fait sens en tout cas du point de vue des dimensions puisqu'on identifie des cercles de  $S^3$  à des points de  $S^2$ . Pour plus de détails on renvoie aux exercices.

Si on connaît l'algèbre des quaternions  $\mathbb{H}$ , on peut construire de manière analogue les espaces projectifs quaternioniques...

#### 4. Quotients par des actions de groupes

Comme c'était le cas dans l'exemple des espaces projectifs, de nombreuses relations d'équivalence proviennent de l'action d'un groupe sur un espace topologique. Même si la plupart des espaces que nous construirons ainsi viendront de l'action d'un groupe fini, les actions de groupes topologiques sont aussi intéressantes. C'est le cas de  $S^1$  que nous venons de rencontrer ci-dessus.

DÉFINITION 4.1. Un *groupe topologique* est un groupe  $G$  muni d'une topologie pour laquelle la multiplication  $m: G \times G \rightarrow G$  et l'inverse  $\iota: G \rightarrow G$  sont des applications continues.

Tout groupe peut être vu comme groupe topologique si on le munit de la topologie discrète. Nous appellerons alors ce groupe topologique discret simplement un groupe. Ce sera en particulier le cas pour tous les groupes finis que nous rencontrerons.

EXEMPLE 4.2. Le cercle unité  $S^1 \subset \mathbb{C}$  est un groupe topologique pour la structure de groupe donné par la multiplication complexe et pour la structure topologique donnée par la topologie de sous-espace de  $\mathbb{C}$ . Clairement la multiplication et l'inverse sont continues, la formule de l'inverse en coordonnées,  $\iota(a + bi) = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ , montre la continuité de  $\iota$  par exemple.

De même le cercle unité  $S^3 \subset \mathbb{H}$  est un groupe topologique, qui n'est toutefois pas commutatif. De fait les seules sphères que l'on peut munir d'une multiplication sont  $S^0, S^1, S^3$  et ...  $S^7$ , mais cette dernière multiplication octonionique n'est pas associative.

EXEMPLE 4.3. L'addition munit l'espace métrique  $\mathbb{R}^n$  d'une structure de groupe topologique. Le même raisonnement s'applique à  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{Q}^n$ .

EXEMPLE 4.4. Le groupe multiplicatif des matrices inversibles  $GL_n(\mathbb{R})$  est un groupe topologique pour la topologie de sous-espace de  $M_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ . Les formules de la multiplication et de l'inverse en coordonnées, bien connues de l'algèbre linéaire, montrent qu'elles sont continues.

On peut encore se restreindre à des sous-groupes plus petits : les matrices orthogonales  $O(n)$ , spéciales orthogonales  $SO(n)$  ou unitaires  $U(n)$  et spéciales unitaires  $SU(n)$ , etc.

PROPOSITION 4.5. *Si  $G$  est un groupe topologique, alors tout sous-groupe  $H < G$  hérite d'une structure de groupe topologique.*

DÉMONSTRATION. La multiplication est celle de  $G$  et la continuité de  $m$  et de  $\iota$  suit de la définition de la topologie de sous-espace.  $\square$

Nous introduisons maintenant les actions de groupe, et essayerons de systématiquement les utiliser à droite. Tout fonctionne également pour les actions à gauche, mutatis mutandis.

DÉFINITION 4.6. Une *action (à droite)* d'un groupe topologique  $G$  sur un espace  $X$  est une application continue  $\mu : X \times G \rightarrow X$ , notée aussi simplement  $\mu(x, g) = x \cdot g$ , telle que

- (1)  $x \cdot 1 = x$  pour tout  $x \in X$  ;

(2)  $x \cdot (gg') = (x \cdot g) \cdot g'$  pour tous  $x \in X$  et  $g, g' \in G$ .

On peut aussi se représenter ces propriétés sous forme de diagrammes commutatifs. Par exemple, si  $i$  désigne l'inclusion de l'élément neutre dans  $G$ , alors le triangle suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\cong} & X \times e_G & \xrightarrow{id_X \times i} & X \times G \\ & \searrow id_X & & & \downarrow \mu \\ & & & & X \end{array}$$

La deuxième propriété signifie que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times id_G} & X \times G \\ id_X \times m \downarrow & & \downarrow \mu \\ X \times G & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

**DÉFINITION 4.7.** Soit  $X$  un espace sur lequel agit un groupe topologique  $G$ . L'espace des orbites  $X/G$  est le quotient de  $X$  par la relation  $x \sim y$  si et seulement si il existe  $g \in G$  avec  $x = y \cdot g$ .

**EXEMPLE 4.8.** Le groupe  $C_2$ , cyclique d'ordre 2, agit sur la sphère unité  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  par l'action antipodale. Le générateur agit donc sur un point  $\mathbf{x}$  en l'envoyant sur  $-\mathbf{x}$ . Le plus pratique pour cela est de choisir comme modèle pour  $C_2$  le groupe des nombres réels de norme 1, c'est-à-dire  $\{\pm 1\} = O(1)$  qui agit par multiplication (à droite). L'espace quotient  $S^n/C_2$  est  $\mathbb{R}P^n$ .

De même  $S^1$  agit sur les sphères unité de  $\mathbb{C}^{n+1}$  et les quotients  $S^{2n+1}/S^1$  sont les espaces projectifs complexes  $\mathbb{C}P^n$ .

Le groupe additif  $\mathbb{Z}^2$  agit par translations dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . L'espace quotient  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  est le tore.

Le cercle  $S^1$  agit sur la sphère  $S^2$  par rotations horizontales le long des parallèles et  $S^2/S^1$  est alors homéomorphe à un intervalle  $I$ . Les extrémités sont les classes d'équivalence des pôles, les autres points celles d'un parallèle.

**REMARQUE 4.9.** Tout sous-groupe  $H < G$  agit par multiplication sur le groupe topologique  $G$ . Cette action  $G \times H \rightarrow G$  donne lieu à un quotient  $G/H$  dont les éléments sont précisément les orbites  $gH$ , classes d'équivalence de tous les éléments  $g' \sim g$ , i.e. tous les  $g'$  de la forme  $gh$  pour un  $h \in H$ . Ainsi  $g \sim g'$  si et seulement

$g^{-1}g' \in H$ . En particulier chaque classe dans le quotient a la même cardinalité, à savoir  $|H|$ , alors que dans un quotient topologique arbitraire tout peut arriver.

Lorsque  $H \triangleleft G$  est un sous-groupe normal, le quotient hérite d'une structure de groupe (topologique).

EXEMPLE 4.10. Le sous-groupe  $S^1$  agit sur la sphère quaternionique  $S^3 \subset \mathbb{H}$ . L'espace des orbites  $S^3/S^1$  est homéomorphe à la sphère  $S^2$ . On remarquera que  $S^1 < S^3$  n'est pas un sous-groupe normal puisque par exemple la conjugaison de  $i \in S^1$  par  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$  donne  $\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}k$ ...

PROPOSITION 4.11. *Soit  $G$  un groupe topologique qui agit sur un espace  $X$ . Alors :*

- (1) *L'application quotient  $q: X \rightarrow X/G$  est ouverte.*
- (2) *Si  $X$  est compact,  $X/G$  aussi est compact.*
- (3) *Si  $X$  et  $G$  sont compacts et séparés, alors  $X/G$  aussi est compact et séparé.*

DÉMONSTRATION. Comme la multiplication par  $g$  est un homéomorphisme sur  $X$  (dont l'inverse est la multiplication par  $g^{-1}$ ), l'image  $U \cdot g$  d'un ouvert  $U$  de  $X$  est encore un ouvert. Or pour tout ouvert  $U \subset X$ , on a  $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} U \cdot g$  qui est ouvert, ce qui montre que  $q(U)$  est ouvert dans le quotient.

Le deuxième point découle du critère de compacité et c'est la séparabilité du dernier point qui va nous occuper pour la fin de la preuve. Pour cela nous vérifions la définition. Comme  $X$  est séparé, la diagonale  $\Delta \subset X \times X$  est fermée et comme  $X$  est compact,  $\Delta$  est compact aussi. On considère l'application  $G \times X \times X \rightarrow X \times X$  donnée par  $(g, x, y) \mapsto (x, yg)$ . L'image de  $G \times \Delta$  est le graphe  $\Gamma \subset X \times X$  de la relation d'équivalence définie par l'action de  $G$ . Or  $G$  étant compact,  $G \times \Delta$  est compact et son image  $\Gamma$  est compacte, donc en particulier fermée (car  $X \times X$  est séparé).

Considérons maintenant  $xG$  et  $yG$  deux orbites distinctes. Alors  $y \neq xg$  pour tout  $g \in G$ , autrement dit  $(x, y) \notin \Gamma$ . Par définition de la topologie produit il existe alors des voisinages ouverts  $x \in U$  et  $y \in V$  tels que  $U \times V$  et  $\Gamma$  sont disjoints. Les images  $q(U)$  et  $q(V)$  sont des voisinages ouverts des orbites  $q(x)$  et  $q(y)$  respectivement et on prétend qu'ils sont disjoints.

En effet, si  $zG \in q(U) \cap q(V)$ , alors il existe  $g, g' \in G$  tels que  $zg \in U$  et  $zg' \in V$ . Mais  $(zg, zg') = (zg, zg \cdot g^{-1}g')$  est alors un point de  $U \times V$  et de  $\Gamma$ , une contradiction.  $\square$

EXEMPLE 4.12. Les espaces projectifs  $\mathbb{R}P^n$  et  $\mathbb{C}P^n$  sont compacts et séparés.

### 5. Quelques quotients liés aux groupes $SO(n)$

Dans cette petite section nous étudions d'un peu plus près quelques espaces obtenus par des actions de groupes de matrices orthogonales, et retrouvons un espace projectif (compact) introduit ci-dessus. On commence avec un résultat général sur les *espaces homogènes*, i.e., des espaces sur lesquels un groupe agit transitivement.

PROPOSITION 5.1. *Soit  $G$  un groupe topologique compact qui agit transitivement sur un espace  $X$  séparé. Alors  $G/G_x \approx X$  pour tout point  $x \in X$ .*

DÉMONSTRATION. Fixons  $x \in X$  et considérons l'application  $\varphi_x: G \rightarrow X$  définie par  $\varphi_x(g) = xg$ . On voit aussi que  $xg = xg'$  si et seulement si  $xg'g^{-1} = x$ , i.e.  $g'g^{-1}$  appartient au stabilisateur  $G_x$ .

Par conséquent  $\varphi_x$  passe au quotient  $\bar{\varphi}_x: G/G_x \rightarrow X$  et cette application est injective par le calcul ci-dessus, et surjective par transitivité de l'action. Comme la source  $G/G_x$  est compacte et que le but  $X$  est séparé, on conclut que  $\bar{\varphi}_x$  est un homéomorphisme.  $\square$

EXEMPLE 5.2. Soit  $n \geq 2$ . Le groupe  $SO(n)$  agit transitivement sur la sphère  $S^{n-1}$  (par rotations, c'est-à-dire par multiplication matricielle sur un vecteur ligne pour définir l'action à droite, ou peut-être de manière plus habituelle sur un vecteur colonne, à gauche). Cette action est transitive.

Le stabilisateur d'un point, disons le vecteur  $\mathbf{e}_n$ , est l'ensemble des rotations dont l'axe est supporté par  $\mathbf{e}_n$ , c'est le sous-groupe  $SO(n-1)$  vu comme matrices diagonales par blocs, un bloc étant de taille  $(n-1) \times (n-1)$  et l'autre un 1 en position  $(n, n)$ . On applique la Proposition 5.1 pour conclure que le quotient de groupes  $SO(n)/SO(n-1)$  est homéomorphe à une sphère  $S^{n-1}$ .

Pour  $n = 1$  on a  $O(1) \approx S^0$  et  $SO(1)$  est le groupe trivial. Pour  $n = 2$  on obtient l'identification  $SO(2) \approx S^1$  (qu'on peut en fait promouvoir en un isomorphisme de groupes topologiques).

Pour  $n = 3$ , on a  $SO(3)/SO(2) \approx S^2$ .

On termine cette section en identifiant  $SO(3)$  avec  $\mathbb{R}P^3$ . On sait que  $\mathbb{R}P^1$  est un cercle : L'application  $S^1 \rightarrow S^1$  donnée par l'élevation au carré dans  $\mathbb{C}$  passe au quotient et définit une application  $\mathbb{R}P^1 \rightarrow S^1$  qui est un homéomorphisme.

PROPOSITION 5.3. *On a un homéomorphisme  $SO(3) \approx \mathbb{R}P^3$ .*

DÉMONSTRATION. Par définition  $\mathbb{R}P^3$  est le quotient de  $S^3$  par la relation antipodale. Comme tout point de ce quotient admet une préimage dans l'hémisphère nord  $H$ , on peut également voir  $\mathbb{R}P^3$  comme le quotient de  $H$  par la relation antipodale restreinte au bord. Finalement, comme  $H$  est homéomorphe au disque  $D^3$ , on voit que  $\mathbb{R}P^3 \approx D^3/\sim$  où  $x \sim y$  si et seulement si, soit  $x = y$ , soit  $y = -x$  lorsque  $x, y \in S^2 = \partial D^3$ .

Construisons une application  $f: D^3 \rightarrow SO(3)$ . On choisit d'envoyer le centre de la boule,  $\mathbf{0}$ , sur l'identité et tout  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  sur la rotation  $\mathcal{R}(O\mathbf{x}, \pi\|\mathbf{x}\|)$  d'axe  $O\mathbf{x}$  et d'angle  $\pi\|\mathbf{x}\|$ . Cette application est continue en tout point, sauf éventuellement au voisinage de l'origine. La topologie de  $SO(3)$  étant celle de sous-espace de  $M_3(\mathbb{R})$ , on voit que la rotation  $\mathcal{R}(O\mathbf{x}, \epsilon)$  est proche de l'identité (car  $\cos \epsilon$  est proche de 1 et  $\sin \epsilon$  est proche de zéro). Ceci implique qu'une rotation d'axe arbitraire et d'angle  $\epsilon$ , qui est obtenue en conjuguant la rotation précédente par une matrice de rotation  $S$ , est proche de  $S \cdot I_3 \cdot S^{-1} = I_3$ . Ceci montre que  $f$  est également continue en  $\mathbf{0}$ .

On observe aussi que si  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , alors  $f(\mathbf{x})$  est une rotation d'angle  $\pi$  et d'axe supporté par  $\mathbf{x}$ , donc  $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ . Par conséquent  $f$  passe au quotient et induit une application  $\bar{f}: \mathbb{R}P^3 \rightarrow SO(3)$ . Il reste à montrer que  $\bar{f}$  est un homéomorphisme. L'injectivité vient du fait que deux rotations sont égales si et seulement leurs axes sont les mêmes et leurs angles différent de  $2\pi$ . Pour montrer la surjectivité considérons une rotation arbitraire, d'angle  $\alpha$  compris entre 0 et  $2\pi$  et d'axe engendré par un vecteur unitaire  $\mathbf{y}$ . Alors

$$\begin{cases} f(\frac{\alpha}{\pi}\mathbf{y}) = \mathcal{R}(O\mathbf{y}, \alpha) & \text{si } \alpha \leq \pi \\ f((\frac{2\pi-\alpha}{\pi}) \cdot (-\mathbf{y})) = \mathcal{R}(O\mathbf{y}, \alpha) & \text{si } \alpha \geq \pi \end{cases}$$

Pour obtenir la rotation d'axe  $O\mathbf{y}$  et d'angle  $\alpha > \pi$ , on utilise ce que j'avais pensé faire correctement dans la version 2022 de ces notes de cours, c'est-à-dire que  $\mathcal{R}(O\mathbf{y}, \alpha) =$

$\mathcal{R}(O(-\mathbf{y}), 2\pi - \alpha)$ . Ainsi cette rotation est aussi dans l'image de  $f$ , c'est celle du vecteur  $\frac{2\pi - \alpha}{\pi} \cdot (-\mathbf{y})$ .

On conclut par le fait que la source  $\mathbb{R}P^3$  est compacte et le but  $SO(3)$  est séparé.  $\square$

## 6. Recoller des espaces

Soient  $f: A \rightarrow X$  et  $g: A \rightarrow Y$  deux applications. Nous construisons un nouvel espace à l'aide de  $X$  et de  $Y$  en identifiant leur "partie commune"  $A$ .

DÉFINITION 6.1. On note  $X \cup_A Y$  le *recollement* obtenu de  $X \amalg Y$  en identifiant  $f(a)$  avec  $g(a)$  pour tout  $a \in A$ .

Plus précisément  $X \cup_A Y$  est le quotient de  $X \amalg Y$  par la relation d'équivalence  $\sim$  engendrée par les identifications  $x \sim y$  si  $x = y$  ou s'il existe  $a \in A$  tel que  $x = f(a)$  et  $y = g(a)$ . Nous précisons ici que c'est la relation d'équivalence engendrée par cette règle puisque typiquement on identifiera aussi  $f(a)$  et  $f(b)$  si  $g(a) = g(b)$ . En effet on a alors

$$f(a) \sim g(a) = g(b) \sim f(b)$$

En général on identifie deux points s'il existe un "zigzag" de situations élémentaires comme celle-ci.

EXEMPLE 6.2. Si  $A$  est un sous-espace de deux espaces  $X$  et  $Y$ , i.e.  $f: A \hookrightarrow X$  et  $g: A \hookrightarrow Y$  sont deux applications injectives, alors  $X \cup_A Y$  est obtenu de  $X \amalg Y$  en identifiant uniquement  $f(a) \sim g(a)$ . Par exemple, lorsque  $A = \star$  est un singleton,  $f$  et  $g$  correspondent alors au choix de deux points de base  $x_0 \in X$  et  $y_0 \in Y$  et le recollement est le wedge  $X \vee Y$ .

REMARQUE 6.3. Nous avons deux applications  $i: X \rightarrow X \cup_A Y$  et  $j: Y \rightarrow X \cup_A Y$  définies respectivement par  $i(x) = [x]$  et  $j(y) = [y]$  où  $x \in X, y \in Y$  et  $[x]$  désigne la classe de  $x$  dans le recollement. On a donc un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{i} & X \cup_A Y \end{array}$$

puisque  $j(g(a)) = [g(a)] = [f(a)] = i(f(a))$ . On identifie le recollement  $X \cup_A Y$  avec le *pushout* du diagramme  $X \leftarrow A \rightarrow Y$  grâce à la propriété universelle dont cet espace jouit.

PROPOSITION 6.4. *Soient  $f: A \rightarrow X$  et  $g: A \rightarrow Y$  deux applications. Pour toute paire d'applications  $\alpha: X \rightarrow Z$  et  $\beta: Y \rightarrow Z$  telles que  $\alpha \circ f = \beta \circ g$  il existe une unique application  $\theta: X \cup_A Y \rightarrow Z$  telle que  $\theta \circ i = \alpha$ ,  $\theta \circ j = \beta$ .*

DÉMONSTRATION. On se représente cela sous forme de diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{g} & Y \\
 f \downarrow & & \downarrow j \\
 X & \xrightarrow{i} & X \cup_A Y \\
 & \searrow \alpha & \nearrow \beta \\
 & & Z
 \end{array}$$

(Note: In the original image, a dashed arrow labeled  $\theta$  points from  $X \cup_A Y$  to  $Z$ , and a curved arrow labeled  $\alpha$  points from  $X$  to  $Z$ , and a curved arrow labeled  $\beta$  points from  $Y$  to  $Z$ .)

Les applications  $\alpha$  et  $\beta$  induisent une application  $H: X \amalg Y \rightarrow Z$ . On observe que

$$H(f(a)) = \alpha(f(a)) = \beta(g(a)) = H(g(a))$$

si bien que  $H$  passe au quotient et induit une application  $\theta$  sur le quotient avec les propriétés voulues. L'unicité vient du fait que la valeur de  $\theta([x])$  est imposée par les hypothèses pour tout  $x \in X$  puisque  $\theta([x]) = \theta(i(x))$  doit être égal à  $\alpha(x)$  et de même  $\theta([y]) = \beta(y)$  pour tout  $y \in Y$ .  $\square$

Pour éviter les problèmes d'identification on va dès maintenant supposer que  $g$  est l'inclusion d'un sous-espace fermé  $A$  de  $Y$ . En effet dans ce cas la classe de  $y$  dans le quotient  $X \cup_A Y$  contient uniquement  $y$  si  $y \notin \text{Im} g$ , et sinon  $y = g(a)$  pour un unique point  $a \in A$  par injectivité de  $g$  et on a  $g(a) \sim f(a)$ . Ainsi on identifie  $x \in \text{Im} f$  avec  $g(a)$  pour tout  $a$  dans la préimage  $f^{-1}(x)$ . On note  $q: X \amalg Y \rightarrow X \cup_A Y$  l'application quotient.

LEMME 6.5. *Soient  $X, Y$  deux espaces,  $g$  l'inclusion d'un sous-espace  $A \subset Y$  fermé et  $f: A \rightarrow X$ . Pour tout sous-espace  $C \subset Y$ , on a*

$$q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \amalg C \cup f^{-1}(f(C \cap A)).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $y \in C$ . Si  $y \notin A$ , alors la classe  $[y]$  est un singleton  $\{y\}$ . Sinon la relation d'équivalence identifie dans le quotient  $y$  avec  $f(y) \in X$ , et par saturation avec tous les points de  $f^{-1}(f(y))$ . Ainsi

$$q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod (C \setminus A) \cup f^{-1}(f(C \cap A))$$

Comme  $C \cap A$  est contenu dans sa saturation par  $f$ , on obtient bien  $q^{-1}(q(C)) = f(C \cap A) \coprod C \cup f^{-1}(f(C \cap A))$ .  $\square$

LEMME 6.6. *Soient  $X, Y$  deux espaces,  $g$  l'inclusion d'un sous-espace  $A \subset Y$  fermé et  $f: A \rightarrow X$ . Pour tout sous-espace  $C \subset X$ , on a  $q^{-1}(q(C)) = C \coprod f^{-1}(C)$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $x \in C$ , alors  $x$  s'identifie dans le quotient avec  $f^{-1}(x)$ , ce qui montre immédiatement le lemme.  $\square$

PROPOSITION 6.7. *Soient  $X, Y$  des espaces séparés,  $g$  l'inclusion d'un sous-espace compact  $A \subset Y$  et  $f: A \rightarrow X$  une application. Alors le pushout  $X \cup_A Y$  est séparé.*

DÉMONSTRATION. On prépare la démonstration en montrant d'abord que l'application quotient  $q: X \coprod Y \rightarrow X \cup_A Y$  est fermée. Comme un fermé de la réunion disjointe est une réunion disjointe de fermés, on traite le cas d'un fermé de  $X$ , puis celui d'un fermé de  $Y$ . Le premier cas suit du Lemme 6.6 sans hypothèse sur  $A$ . Pour le second on utilise le Lemme 6.5 en observant que,  $Y$  étant séparé,  $C \cap A$  est fermé dans un compact, donc compact, si bien que  $f(C \cap A)$  est compact dans un espace séparé, donc fermé. Finalement, par définition des fermés de la topologie quotient, on conclut que  $q(C)$  est fermé pour tout fermé de  $X \coprod Y$ .

Nous vérifions maintenant le critère de la Proposition 3.5. La saturation d'un point est soit un point soit, par les calculs précédents, une union  $f(a) \coprod f^{-1}(f(a))$  si  $a \in A$ . Les préimages de points étant des fermés dans le compact  $A$ , elles sont compactes. Les préparatifs de cette preuve montrent que la saturation d'un fermé est fermée.  $\square$

## 7. Attachement de cellules

Un cas particulier et important de la construction précédente est celui où  $g$  est l'inclusion  $A \hookrightarrow CA$  de la base du cône. Le cas classique  $A = S^{n-1}$  et  $g: S^{n-1} \subset$

$D^n$  (on rappelle que le cône sur une sphère est homéomorphe à une boule) nous permettra de construire une classe d'espaces fondamentale en théorie de l'homotopie, par attachement de cellules.

**DÉFINITION 7.1.** Soit  $f: A \rightarrow X$  une application. On dit que le pushout  $X \cup_A CA$ , aussi noté  $X \cup_f CA$ , est obtenu de  $X$  en *attachant une  $A$ -cellule* le long de  $f$ . L'application  $f$  est appelée *application d'attachement*.

Grâce à la Proposition 6.7 on a un critère de séparation.

**PROPOSITION 7.2.** Soient  $X, A$  des espaces séparés et  $f: A \rightarrow X$  une application. Alors le pushout  $X \cup_A CA$  est séparé si  $A$  est compact, et compact si de plus  $X$  est aussi compact.

**DÉMONSTRATION.** Le cône sur un espace séparé est séparé (on peut aussi utiliser le critère lorsque  $A$  est compact, voir exercices). Si  $A$  est compact on conclut par la Proposition 6.7 que  $X \cup_A CA$  est séparé. Cet espace est compact quand  $X \amalg CA$  est compact par le critère de compacité.  $\square$

Avant l'exemple suivant on introduit la suspension (non réduite) d'un espace.

**DÉFINITION 7.3.** Soit  $A$  un espace. La *suspension*  $\Sigma A$  est l'espace quotient du cylindre  $A \times I$  par la relation d'équivalence  $(a, t) \sim (b, s)$  si et seulement si  $(a = b$  et  $s = t)$  ou  $(s = t = 0)$  ou  $(s = t = 1)$ .

Autrement dit on collapse séparément les deux bases du cylindre pour obtenir la suspension.

**EXEMPLE 7.4.** Soit  $f: A \rightarrow X$  une application constante sur un point  $x_0 \in X$ . Alors l'espace  $X \cup_A CA$  est homéomorphe à  $X \vee \Sigma A$ .

La situation la plus courante en théorie de l'homotopie est celle où  $A = S^{n-1}$  et l'une des deux applications est l'inclusion de la sphère comme bord de la boule  $D^n$ . On écrit  $e^n$  pour un espace homéomorphe à  $D^n$ .

**DÉFINITION 7.5.** Soit  $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  l'inclusion du bord de la boule. Pour toute application  $f: S^{n-1} \rightarrow X$ , le recollement  $X \cup_{S^{n-1}} D^n$  s'écrit aussi (et de préférence)

$X \cup_f e^n$  et on dit que cet espace est obtenu à partir de  $X$  en attachant une cellule de dimension  $n$ .

EXEMPLE 7.6. Le cercle  $S^1$  peut être vu comme  $\star \cup D^1$  pour la seule application d'attachement  $S^0 \rightarrow \star$ , ou comme  $S^0 \cup_{id} D^1 \cup_{id} D^1$  où les deux cellules de dimension 1 représentent les deux hémicycles de  $S^1$ . Il existe de la même manière une structure cellulaire sur  $S^n$  avec une seule 0-cellule et une seule  $n$ -cellule et une autre structure avec deux cellules de chaque dimension comprise entre 0 et  $n$ , obtenue inductivement de cette structure sur  $S^{n-1}$  en attachant les deux hémisphères manquants.

Observons encore que pour ce modèle avec deux cellules en chaque dimension, ces cellules sont permutées par l'action antipodale si bien que le quotient  $\mathbb{R}P^n$  hérite d'une structure cellulaire avec exactement une cellule en chaque dimension. Nous en verrons les détails en exercices, mais regardons plus attentivement le cas de  $\mathbb{R}P^2$  ici.

EXEMPLE 7.7. L'espace projectif  $\mathbb{R}P^0$  est le quotient de  $S^0$  par l'antipodale, autrement dit  $\mathbb{R}P^0$  est un point. On continue avec  $\mathbb{R}P^1$ , le quotient de  $S^1$  par l'antipodale. Puisque le demi-cercle Nord  $N$  contient un représentant de chaque classe, la projection  $N \rightarrow \mathbb{R}P^1$  est un quotient qui nous permet d'identifier  $\mathbb{R}P^1$  comme le pushout  $[-1; 1] \leftarrow \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}P^0$ . La propriété universelle du pushout établit un homéomorphisme entre  $S^1$  et  $\mathbb{R}P^1$ .

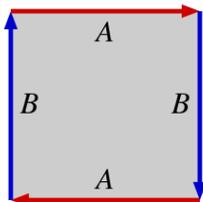
Le plan projectif  $\mathbb{R}P^2$  est le quotient d'un disque dont on identifie deux par deux les points du bord,  $\mathbf{x} \sim -\mathbf{x}$ . On peut montrer à la main que l'inclusion  $D^2 \hookrightarrow S^2$  induit un homéomorphisme sur les espaces quotients définis par la relation antipodale, ou utiliser le critère vu en exercice sur les fermés saturés (qui sont facile à décrire ici). De ce point de vue le plan projectif est un cercle, à savoir  $\mathbb{R}P^1$ , auquel on attache une 2-cellule, représentée par l'intérieur du disque. Explicitement l'application d'attachement est donnée par

$$S^1 \approx \partial D^2 \rightarrow S^1/C_2 = \mathbb{R}P^1 \approx S^1$$

Autrement dit cette application d'attachement est l'application de degré 2, qui effectue deux tours du cercle, un pour chaque demi-cercle. On construit alors le pushout du diagramme  $D^2 \leftarrow S^1 \xrightarrow{2} S^1$ , qui est par définition  $S^1 \cup_2 e^2$ . La propriété universelle du pushout permet de construire une application vers  $\mathbb{R}P^2$  en choisissant l'inclusion

de  $\mathbb{R}P^1$  sur le cercle et l'application quotient sur le disque. Cette bijection d'un compact vers un espace de Hausdorff est un homéomorphisme.

Comme le disque est homéomorphe à un carré, on peut aussi en donner la représentation suivante (tirée de Wikipedia) :



Ainsi  $\mathbb{R}P^2$  admet une autre présentation cellulaire : c'est un cercle formé de deux 1-cellules, indiquées par  $a$  et  $b$  sur l'illustration ci-dessus. L'application d'attachement est décrite cette fois par  $abab$  (on effectue à nouveau deux fois le tour du cercle).

## Chapitre 2

### Homotopies et groupe fondamental

Dans ce deuxième chapitre nous introduisons la notion générale d'homotopie pour des applications  $X \rightarrow Y$ . Elle nous permet de définir une relation d'équivalence plus faible que celle d'homéomorphisme entre espaces, à savoir celle d'homotopie. Lorsque la source  $X$  est un cercle, on retrouve dans le cadre pointé les homotopies de lacets et par suite le groupe fondamental qui sera le grand protagoniste des chapitres principaux de ce cours. A la fin du chapitre on retrouve les quotients, ayant eu un peu de temps pour digérer ce concept difficile. On présente en particulier quelques surfaces bien connues du point de vue de l'attachement des cellules : le tore, le plan projectif, la bouteille de Klein. Pour former de nouvelles surfaces nous découvrons l'opération de somme connexe.

#### 1. Homotopie

Nous généralisons dans cette section la notion de lacets homotopes à des applications entre deux espaces arbitraires. Ces quelques définitions devraient éclairer la démonstration de la contractilité du cône, voir le Lemme 1.7.

**DÉFINITION 1.1.** Soient  $f, g: X \rightarrow Y$  deux applications. On dit que  $f$  et  $g$  sont *homotopes* et on note  $f \simeq g$  s'il existe une application  $H: X \times I \rightarrow Y$  telle que  $H(x, 0) = f$  et  $H(x, 1) = g$  pour tout  $x \in X$ . On dit que  $H$  est une *homotopie* de  $f$  vers  $g$ .

On visualise  $H$  comme étant une déformation qui transforme continument  $f$  en  $g$  au cours du temps  $t \in [0, 1]$  (on parcourt le cylindre  $X \times I$  de bas en haut).

**PROPOSITION 1.2.** *La relation  $\simeq$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de  $X$  vers  $Y$ .*

DÉMONSTRATION. L'homotopie constante  $H(x, t) = f(x)$  exhibe une homotopie  $f \simeq f$ . La réflexivité suit du fait que si  $H$  est donnée on peut construire une homotopie “dans l'autre sens” en posant  $G(x, t) = H(x, 1 - t)$ , c'est-à-dire qu'on parcourt le cylindre  $X \times I$  de haut en bas.

Enfin si  $G$  et  $H$  sont des homotopies respectivement de  $f$  vers  $g$  et de  $g$  vers  $h$ , on construit une homotopie de  $f$  vers  $h$  en parcourant chaque cylindre de bas en haut deux fois plus vite. Explicitement on définit  $F: X \times I \rightarrow Y$  par

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} G(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H(x, 2t - 1) & \text{si } 1/2 < t \leq 1 \end{cases}$$

La continuité de  $F$  démontre la transitivité. □

La nécessité de reparamétriser le cylindre pour obtenir une homotopie qui dure aussi 1 (seconde) crée un petit problème technique, que nous retrouverons sous une autre forme lors de l'étude de l'associativité de la concaténation des chemins dans le groupe fondamental.

NOTATION 1.3. Le quotient de l'ensemble de toutes les applications  $X \rightarrow Y$  par la relation d'équivalence  $\simeq$  est noté  $[X, Y]$ . La classe d'une application  $f$  est notée  $[f]$ .

EXEMPLE 1.4. Soit  $f: X \rightarrow Y$  et  $c_y$  l'application constante en un point  $y \in Y$ . Alors  $f$  est homotope à une application constante si et seulement si l'application  $f$  s'étend au cône  $CX$  qui contient  $X$  via l'inclusion de la base  $i: X \times 0 \hookrightarrow CX$ . Explicitement  $f \simeq c_y$  si et seulement si il existe une application  $F: CX \rightarrow Y$  telle que  $F \circ i = f$  et  $F([x, 1]) = y$  où  $[x, 1]$  est la classe de  $(x, 1)$  dans le cône.

En particulier si  $X = S^1$ , on a qu'une application  $f: S^1 \rightarrow Y$  est homotope à une application constante si et seulement si  $f$  s'étend à une application sur  $D^2$ .

DÉFINITION 1.5. Deux espaces  $X$  et  $Y$  ont *le même type d'homotopie* s'il existe des applications  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f \simeq id_X$  et  $f \circ g \simeq id_Y$ . On note alors  $X \simeq Y$  et on appelle  $f$  et  $g$  des *équivalences d'homotopie*.

Ceci est vérifié en particulier lorsque les applications  $f$  et  $g$  sont inverses l'une de l'autre (les deux compositions ne sont pas seulement homotopes à l'identité, elles sont égales à l'identité). Ainsi deux espaces homéomorphes sont homotopes.

EXEMPLE 1.6. Le cône  $CX$  a le même type d'homotopie qu'un point  $\star$ . On dit que  $CX$  est contractile. L'application  $f: CX \rightarrow \star$  est la seule qui existe et on définit  $g: \star \rightarrow CX$  par  $g(\star) = [x, 0]$ . Alors  $f \circ g = id_\star$  et  $g \circ f$  est homotope à l'identité  $id_{CX}$ , ce que nous montrons en construisant une "contraction".

LEMME 1.7. *Le cône  $CX$  est contractile pour tout espace  $X$ .*

DÉMONSTRATION. On définit une application  $H: X \times I \times I \rightarrow X \times I$  en posant  $H(x, t, s) = (x, ts)$ . Puisque  $H(x, 0, s) = (x, 0)$ , cette application passe au quotient et définit une contraction (ou homotopie contractante)  $\bar{H}: CX \times I \rightarrow CX$  en posant  $\bar{H}([x, t], s) = [x, st]$ . Lorsqu'on restreint  $H$  à  $s = 0$  on obtient l'application constante au sommet du cône et quand  $s = 1$  c'est l'identité.  $\square$

EXEMPLE 1.8. Le cercle, le ruban de Moebius, le tore plein, le plan privé d'un point ont tous le même type d'homotopie. A voir en exercice.

REMARQUE 1.9. Les définitions ci-dessus ont un analogue *pointé*. On considère dans ce cadre des espaces pointés  $(X, x_0)$ , autrement dit des espaces  $X$  munis d'un point de base  $x_0$ .

On parle alors d'homotopie pointée entre applications pointées pour des homotopies qui fixent le point de base tout au long de l'homotopie :  $H(x_0, t) = y_0$  pour tout  $t$ . On notera alors  $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$  pour l'ensemble des classes d'homotopie pointées ou  $[X, Y]_*$  tout simplement lorsque le contexte est clair.

EXEMPLE 1.10. L'inclusion  $i_2: S^1 \hookrightarrow S^1 \vee S^1$  est homotope à l'application qui parcourt le premier cercle sur le premier tiers de la source  $S^1$ , puis le deuxième cercle du wedge pendant le deuxième tiers et enfin le premier cercle dans l'autre sens pendant le troisième tiers. On peut en effet définir une homotopie (non pointée)  $H$  de sorte qu'au temps  $t$  elle parcourt un lacet dans le wedge en partant du point correspondant à  $e^{2\pi it}$  sur le premier cercle, complète le tour qui reste à faire, passe

par le deuxième cercle, avant de revenir en arrière pour s'arrêter au point de départ. Quand  $t = 1$ , il ne reste que  $i_2$ .

Ces deux applications ne sont pas homotopes dans le sens pointé.

## 2. Attachement de cellules et homotopie

Le type d'homotopie du pushout ne dépend que de l'application d'attachement à homotopie près.

**PROPOSITION 2.1.** *Si  $f, f': A \rightarrow X$  sont homotopes, alors  $Y = X \cup_f CA$  et  $Y' = X \cup_{f'} CA$  ont le même type d'homotopie.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $H: A \times I \rightarrow X$  une homotopie de  $f$  vers  $f'$ . On construit  $h: Y \rightarrow Y'$  par la propriété universelle en posant  $h(x) = x$  pour  $x \in X$  puisque  $Y$  et  $Y'$  sont tous deux obtenus en ajoutant un cône au même espace  $X$ . Sur le cône on pose

$$h[a, t] = \begin{cases} [a, 2(t - 1/2)] & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \\ H(a, 2t) & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \end{cases}$$

La continuité est garantie par le fait que la base  $A \times 0$  du cône est identifiée dans le quotient :  $H(a, 1) = f'(a) \sim [a, 0]$  et on observe que pour  $t = 0$  on a bien la compatibilité nécessaire puisque  $h[a, 0] = H(a, 0) = f(a)$ .

Cette application envoie donc la moitié supérieure du cône (de  $Y$ ) sur le cône de  $Y'$  en le parcourant deux fois plus vite et utilise la moitié inférieure du cône pour "faire le lien" avec l'homotopie  $H$ . On peut imaginer qu'on "couche" la moitié inférieure du cône dans  $X$  pour passer de  $f(A)$  à  $f'(A)$ , la continuité de  $h$  nous obligeant à garder la base fixe dans  $X$ .

On définit de manière analogue une application  $h': Y' \rightarrow Y$  en utilisant l'homotopie inverse  $H(-, 1 - t)$ . Il reste alors à montrer que  $h \circ h' \simeq id_{Y'}$  et  $h' \circ h \simeq id_Y$ . On s'occupe seulement de cette dernière, l'autre est analogue.

Pour pouvoir construire l'homotopie, il faut bien comprendre la composition  $h' \circ h$ . Sur  $X$ , c'est l'identité et sur le cône on a

$$[a, t] \mapsto \begin{cases} [a, 2t - 1] \mapsto [a, 4t - 3] & \text{si } 3/4 \leq t \leq 1 \\ [a, 2t - 1] \mapsto H(a, 1 - 2(2t - 1)) = H(a, 3 - 4t) & \text{si } 1/2 \leq t < 3/4 \\ H(a, 2t) \mapsto H(a, 2t) & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \end{cases}$$

On parcourt donc le cône quatre fois plus vite sur le quart du haut, on utilise l'homotopie pour faire le lien une fois dans un sens, puis dans l'autre. On définit alors une homotopie  $K: Y \times I \rightarrow Y$  par l'identité sur  $X$ , i.e.  $K(x, t) = x$  pour tout  $x \in X$  et sur  $CA \times I$  on prend de plus en plus de temps pour parcourir le cône et on utilise de moins en moins l'homotopie  $H$ . Au temps  $s = 1/2$  par exemple on ne parcourt  $H$  que sur la moitié de son chemin avant de rebrousser chemin. Explicitement :

$$([a, t], s) \mapsto \begin{cases} [a, \frac{4}{4-3s}t - \frac{3s}{4-3s}] & \text{si } 3/4 \cdot s \leq t \leq 1 \\ H(a, 3s - 4t) & \text{si } 1/2 \cdot s \leq t < 3/4 \cdot s \\ H(a, 2t) & \text{si } 0 \leq t < 1/2 \cdot s \end{cases}$$

Quand  $s = 1$  on obtient exactement la composition  $h' \circ h$  calculée ci-dessus et quand  $s = 0$  c'est l'identité sur  $CA$ .  $\square$

**COROLLAIRE 2.2.** *Si  $f, f': S^{n-1} \rightarrow X$  sont deux applications homotopes, alors les espaces  $X \cup_f D^n$  et  $X \cup_{f'} D^n$  sont homotopes.*  $\square$

**EXEMPLE 2.3.** Soit  $f: S^{n-1} \rightarrow X$  une application homotope à une constante. Alors  $X \cup_f D^n \simeq X \vee S^n$ .

Il existe des espaces qu'on ne peut pas construire par attachement de cellules (mais à homotopie faible près c'est le cas...). Et même quand c'est possible, il n'y a aucun résultat d'unicité sur cette structure cellulaire. L'approximation d'un espace par un modèle obtenu à partir d'attachements de cellules  $e^n$  amène à étudier les CW-complexes. Les surfaces que nous allons rencontrer bientôt en font partie et bien souvent c'est un bon cadre de travail, en particulier pour construire des méthodes efficaces de calcul de ces invariants appelés groupes d'homologie.

### 3. Homotopie et $\pi_0$

On travaille dans cette section avec des espaces pointés, c'est-à-dire des paires  $(X, x_0)$  où  $X$  est un espace et  $x_0 \in X$  est un point. On désigne par  $\pi_0 X$  l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ . Autrement dit il s'agit du quotient de  $X$  par la relation d'équivalence de connexité par arcs. Chaque élément de  $\pi_0 X$  correspond à un sous-espace de  $X$ , par exemple la classe  $[x_0]$  est constituée de tous les points  $x \in X$  pour lesquels il existe un chemin  $\gamma : I \rightarrow X$  avec  $\gamma(0) = x_0$  et  $\gamma(1) = x$ .

**DÉFINITION 3.1.** Soient  $(A, a_0)$  et  $(X, x_0)$  deux espaces pointés. On note  $[A, X]_*$  l'ensemble des *classes d'homotopie pointées* d'applications pointées  $f : A \rightarrow X$  (telles que  $f(a_0) = x_0$ ).

On choisit maintenant 1 comme point de base de  $S^0$ , la sphère unité dans  $\mathbb{R}$ .

**PROPOSITION 3.2.** *On a un isomorphisme  $\pi_0 X \cong [S^0, X]_*$ .*

**DÉMONSTRATION.** On définit une application  $[S^0, X]_* \rightarrow \pi_0 X$  en associant à une application  $f : S^0 \rightarrow X$  le point  $f(-1)$ . Si on considère deux applications homotopes  $f \simeq g$ , il existe une homotopie pointée  $H : S^0 \times I \rightarrow X$  de  $f$  vers  $g$ . Cette homotopie est constante sur  $1 \times I$  par définition et l'application  $H(-1, t)$  définit un chemin de  $f(-1)$  vers  $g(-1)$ . Autrement dit l'application passe au quotient.

Elle est surjective car pour toute composante connexe  $Y$  par arcs de  $X$ , on peut choisir un point  $y \in Y$  et définir  $f_y : S^0 \rightarrow X$  en posant  $f(1) = x_0$  et  $f(-1) = y$ .

Montrons enfin l'injectivité. Soient  $f, g : S^0 \rightarrow X$  avec  $f(-1) = x$  et  $g(-1) = y$  dans la même composante connexe par arcs de  $X$ . Il existe alors par définition un chemin  $\gamma : I \rightarrow X$  tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ . On définit alors une homotopie  $H$  en posant  $H(1, t) = x_0$  pour tout  $t$  et  $H(-1, t) = \gamma(t)$ . Ainsi  $f \simeq g$ .  $\square$

### 4. Invariance homotopique

Pour préparer la suite sur le groupe fondamental nous établissons d'abord deux propriétés d'invariance homotopique. Expliquons cela dans le cas libre (non pointé). Deux applications homotopes induisent la même application sur les classes d'homotopie. Toute application  $f : X \rightarrow Y$  induit une application  $f_* : [A, X] \rightarrow [A, Y]$  par postcomposition, i.e.  $f_*[u] = [f \circ u]$ . Cette application est bien définie puisque  $u \simeq v$

implique l'existence d'une homotopie  $H: A \times I \rightarrow X$  entre  $u$  et  $v$ . La composition  $f \circ H$  est alors une homotopie entre  $f \circ u$  et  $f \circ v$ .

**PROPOSITION 4.1.** *Soient  $f$  et  $g$  deux applications homotopes  $X \rightarrow Y$ . Alors  $f$  et  $g$  induisent la même application  $[A, X] \rightarrow [A, Y]$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $H: X \times I \rightarrow Y$  une homotopie de  $f$  vers  $g$  et  $u: A \rightarrow X$ . La composition

$$H \circ (u \times I): A \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$$

définit alors une homotopie de  $H \circ (u \times I)(a, 0) = H(u(a), 0) = f(u(a))$  vers  $H \circ (u \times I)(a, 1) = H(u(a), 1) = g(u(a))$ . Ainsi  $f \circ u \simeq g \circ u$ .  $\square$

**PROPOSITION 4.2.** *Si  $X \simeq Y$ , alors on a une bijection  $[A, X] \cong [A, Y]$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow X$  une équivalence d'homotopie et un inverse. Ceci signifie que  $g \circ f \simeq id_X$  et  $f \circ g \simeq id_Y$ . Ces applications  $f$  et  $g$  induisent des applications  $f_*$  et  $g_*$  au niveau des classes d'homotopie telles que décrites ci-dessus. La composition  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  induit la même application que  $id_X$  par la Proposition 4.1. Or  $(id_X)_*$  est l'identité. Le même raisonnement s'applique également à  $f_* \circ g_*$  ce qui démontre que  $f_*$  et  $g_*$  sont inverses l'une de l'autre.  $\square$

## 5. Le groupe fondamental

Un lacet de  $X$  est un chemin  $\omega: I \rightarrow X$  tel que  $\omega(0) = \omega(1)$ . Si  $x_0$  est un point de base fixé dans  $X$  et qu'on ne considère que les lacets basés en  $x_0$ , on constate alors qu'un lacet est une application qui passe au quotient par  $q: I \rightarrow I/0 \sim 1 \approx S^1$ . Autrement dit, on choisit comme point de base de  $S^1$  le point  $1 \in \mathbb{C}$  et on identifie les lacets basés en  $x_0$  avec les applications pointées  $(S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ .

Nous utiliserons les deux points de vue. La version des chemins est pratique pour écrire des paramétrisations explicites, la version des lacets paramétrisés par le cercle permet de faire le lien avec  $\pi_0 X$ , classes d'homotopie pointées d'origine  $S^0$  et les groupes d'homotopie supérieurs  $\pi_n X = [S^n, X]_*$ . Elle a aussi d'autres avantages comme nous le verrons bientôt.

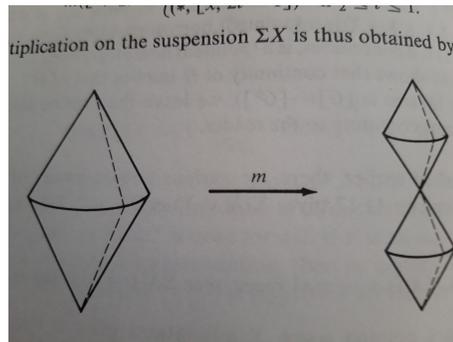
DÉFINITION 5.1. Soit  $(X, x_0)$  un espace pointé. Le *groupe fondamental*  $\pi_1 X = \pi_1(X, x_0)$  est l'ensemble  $[S^1, X]_*$  muni de la loi de composition obtenue par concaténation des chemins.

On note  $f \star g$  la concaténation des chemins  $f, g: I \rightarrow X$ . On choisit la paramétrisation consistant à parcourir le chemin  $f$  deux fois plus vite que  $f$  pour  $0 \leq t \leq 1/2$ , puis le chemin  $g$  pour  $1/2 \leq t \leq 1$ . La classe d'homotopie du chemin constant  $c_{x_0}$  est l'élément neutre pour cette opération, la concaténation est associative à homotopie près et l'inverse de  $f$  est le "chemin inverse", parcouru dans l'autre sens  $f(1-t)$ . Cet inverse n'est pas un inverse strict, mais un inverse à homotopie près. On revisite ce résultat de manière diagrammatique en nous appuyant sur la version paramétrisée par le cercle.

On rappelle que la suspension  $\Sigma A$  est le cylindre  $A \times I$  dans lequel on collapse séparément la base  $A \times 0$  et le couvercle  $A \times 1$ .

DÉFINITION 5.2. Soit  $\Sigma A$  la suspension d'un espace  $A$ . L'application *pinch* (ou pincement) est le quotient  $p: \Sigma A \rightarrow \Sigma A/A \times 1/2$ .

On se retrouve donc avec deux copies "miniatures" de la suspension, attachées ensemble en un sommet. Le type d'homotopie de cet espace est un wedge de deux suspensions (photo tiré du livre de Rotman) :



Puisque le cercle  $S^1$  peut être vu comme la suspension de  $S^0$ , il admet une application pinch  $p: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ . Le modèle que nous choisissons pour faire le lien avec la concaténation des chemins est de voir  $i$  comme la classe de  $(\pm 1, 1)$  et  $-i$  comme celle de  $(\pm 1, 0)$  dans la suspension  $\Sigma S^0$  qui est un quotient de  $S^0 \times I$ . Le

pinch est l'application quotient qui collapse la copie de  $S^0$  centrale, i.e., qui identifie 1 et  $-1$ .

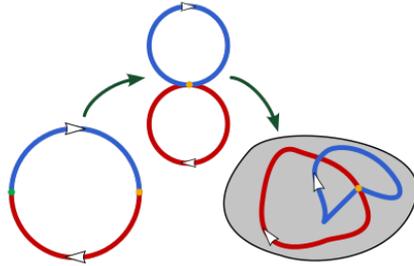
DÉFINITION 5.3. Soit  $(X, x_0)$  un espace pointé. L'application de *pliage* (fold map)  $\nabla: X \vee X \rightarrow X$  est l'application qui se restreint à l'identité sur chaque copie de  $X$ .

La propriété universelle du wedge, comme quotient de  $X \amalg X$ , nous apprend qu'une application  $X \vee X \rightarrow Y$  est déterminée par une application  $X \amalg X \rightarrow Y$ , c'est-à-dire deux applications  $X \rightarrow Y$  qui envoient  $x_0$  sur le même point de  $Y$  (pour qu'elle passe au quotient). Dans le cas du pliage on choisit deux fois l'identité.

PROPOSITION 5.4. *Le groupe fondamental d'un espace est un groupe.*

DÉMONSTRATION. On observe d'abord que la concaténation des lacets est induite par l'application pinch. En effet, étant donnés deux lacets  $\alpha$  et  $\beta$  on a

$$f \star g: S^1 \xrightarrow{p} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$



L'illustration est tirée de Wikipedia. On parcourt en effet le lacet  $\alpha$  pendant le temps qui correspond à l'hémicycle supérieur, puis  $\beta$ . L'associativité de  $\star$  vient alors de la commutativité à homotopie près du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{p} & S^1 \vee S^1 \\ \downarrow p & & \downarrow p \vee id \\ S^1 \vee S^1 & \xrightarrow{id \vee p} & S^1 \vee S^1 \vee S^1 \end{array}$$

Explicitement, cela revient à déformer continuellement une concaténation de trois chemins qu'on parcourt soit en une demi, un quart et un quart de seconde, soit en un quart, un quart et une demi-seconde. Les formules ont été vues en cours le premier semestre et se trouvent dans tous les livres d'introduction à la théorie de l'homotopie.

Les autres vérifications sont les mêmes que celles vues le premier semestre. L'inverse d'un lacet est ce même lacet parcouru dans l'autre sens, la concaténation avec le lacet original n'est pas constante, mais homotope au lacet constant, l'élément neutre de  $\pi_1 X$ .  $\square$

Nous savons qu'une application  $X \rightarrow Y$  induit une application  $f_*: [A, X]_* \rightarrow [A, Y]_*$  par post-composition. Maintenant que nous travaillons avec  $A = S^1$ , nous nous assurons que ces morphismes induits sont compatibles avec la structure de groupe.

**COROLLAIRE 5.5.** *Une application pointée  $f: X \rightarrow Y$  induit un homomorphisme de groupes  $f_*: \pi_1 X \rightarrow \pi_1 Y$ . En particulier, si  $X \simeq Y$ , alors  $\pi_1 X \cong \pi_1 Y$  est un isomorphisme de groupes.*

**DÉMONSTRATION.** L'approche diagrammatique montre que  $f_*$  envoie la concaténation de deux lacets sur la composition passant par le haut dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} S^1 & \xrightarrow{p} & S^1 \vee S^1 & \xrightarrow{\alpha \vee \beta} & X \vee X & \xrightarrow{\nabla} & X \\ \downarrow p & & \downarrow \alpha \vee \beta & & \downarrow f \vee f & & \downarrow f \\ S^1 \vee S^1 & \xrightarrow{\alpha \vee \beta} & X \vee X & \xrightarrow{f \vee f} & Y \vee Y & \xrightarrow{\nabla} & Y \end{array}$$

La composition du bas donne la concaténation des images  $(f \circ \alpha) \star (f \circ \beta)$ . La commutativité du diagramme (de chaque carré de ce diagramme) permet de conclure que  $f_*$  est un homomorphisme de groupes.

Cette observation avec la Proposition 4.2 qui fournit un isomorphisme d'ensembles entre  $\pi_1 X$  et  $\pi_1 Y$  lorsque  $X$  et  $Y$  ont le même type d'homotopie, permet de conclure qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupes dans ce cas.  $\square$

On termine cette section avec le calcul du groupe fondamental d'un produit.

**PROPOSITION 5.6.** *Soient  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  deux espaces pointés. On a alors un isomorphisme  $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1 X \times \pi_1 Y$ .*

**DÉMONSTRATION.** Les projections  $p_X: X \times Y \rightarrow X$  et  $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$  sont continues et induisent des homomorphismes  $\pi_1(X \times Y) \rightarrow \pi_1 X$  et  $\pi_1(X \times Y) \rightarrow \pi_1 Y$ . L'homomorphisme produit  $g: \pi_1(X \times Y) \rightarrow \pi_1 X \times \pi_1 Y$  est un isomorphisme car il admet un inverse que nous définissons maintenant.

En fait, avant de passer au quotient dans les groupes fondamentaux, on reste au niveau des applications  $\mathcal{C}_*(S^1, -)$ . Pour une paire  $\alpha: S^1 \rightarrow X$  et  $\beta: S^1 \rightarrow Y$  on définit

$$F(\alpha, \beta): S^1 \xrightarrow{\Delta} S^1 \times S^1 \xrightarrow{\alpha \times \beta} X \times Y$$

ce qui donne une application ensembliste  $\mathcal{C}_*(S^1, X) \times \mathcal{C}_*(S^1, Y) \rightarrow \mathcal{C}_*(S^1, X \times Y)$ . Clairement  $(p_X)_*(F(\alpha, \beta)) = \alpha$  et  $(p_Y)_*(F(\alpha, \beta)) = \beta$ . Réciproquement, considérons un lacet  $\gamma: S^1 \rightarrow X \times Y$ , alors  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  et les deux projections  $\gamma_i$  sont continues par la définition de la topologie produit. Alors on pose  $G(\gamma) = (\gamma_1, \gamma_2)$ . Par construction  $G \circ F$  est l'identité et on vérifie alors que l'autre composition

$$F(G(\gamma)) = F((p_X)_*(\gamma), (p_Y)_*(\gamma)) = F(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma$$

est aussi l'identité. Ainsi  $F$  et  $G$  sont inverses l'un de l'autre.

Pour terminer on observe que la post-composition de  $F$  avec  $\mathcal{C}_*(S^1, X \times Y) \rightarrow \pi_1(X \times Y)$  passe au quotient et définit  $f: \pi_1 X \times \pi_1 Y \rightarrow \pi_1(X \times Y)$  et  $G$  induit l'homomorphisme produit  $g$  introduit ci-dessus. Le calcul des compositions montre que  $f$  et  $g$  sont inverses l'une de l'autre, ce qui prouve la proposition.  $\square$

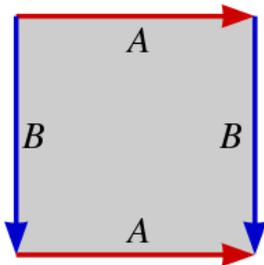
**EXEMPLE 5.7.** Le tore est le produit  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Ainsi on obtient de  $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ , l'isomorphisme  $\pi_1 T^2 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Sous forme de présentation de groupe que nous étudierons dans le chapitre suivant, on dira que ce groupe est engendré par deux générateurs  $x$  et  $y$  et soumis à la relation de commutation  $xy = yx$ , ce qu'on écrit en introduisant le *relateur*  $xyx^{-1}y^{-1}$  qui est identifié à l'élément neutre. On écrit alors  $\pi_1 T^2 \cong \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ .

## 6. Quelques surfaces

Nous revenons à la fin de ce chapitre sur les quotients avec la construction et la description cellulaire de quelques surfaces importantes. Après une petite pause homotopique c'est peut-être le bon moment de retrouver cette notion d'attachement de cellule dans un cadre très concret.

**DÉFINITION 6.1.** Une *surface* est un espace séparé dans lequel tout point admet un voisinage ouvert  $U$  homéomorphe à un disque ouvert  $\mathring{D}^2$ , dont le bord  $\partial U$  est homéomorphe à  $S^1$ .

EXEMPLE 6.2. La sphère  $S^2$  et le tore  $T^2 = S^1 \times S^1$  sont des surfaces. Nous avons déjà rencontré  $S^2 = \star \cup e^2$ , collapse de  $D^2$  par son bord  $S^1$ . Quant au tore, on peut le voir comme quotient de  $I \times I$  par la relation d'équivalence donnée par  $(s, 0) \sim (s, 1)$  et  $(0, t) \sim (1, t)$  pour tous  $0 \leq s, t \leq 1$ .



L'application quotient  $q$  envoie l'intérieur du carré homéomorphiquement sur son image dans le tore et le bord du carré est envoyé sur deux cercles, équateur et méridien, se coupant en un point, à savoir  $q(0, 0)$ . Appelons  $h: S^1 \rightarrow T^2$  l'inclusion de l'équateur (pour garder en tête que ce cercle vient des côtés horizontaux du carré  $I \times I$ ) et bien sûr  $v: S^1 \rightarrow T^2$  l'inclusion du méridien, provenant des côtés verticaux.

Ainsi  $T^2$  est un wedge de deux cercles  $S^1 \vee S^1$  auquel on attache une 2-cellule  $e^2$ . Plus précisément le bord du carré  $\partial(I \times I) = \square \subset I \times I$  a pour quotient via la relation restreinte à  $\square$  un wedge de deux cercles  $S_a^1 \vee S_b^1$  où l'indice indique que le premier cercle  $S_a^1$  correspond aux segments horizontaux, parcouru de gauche à droite pendant que le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique, alors que le second correspond aux segments verticaux parcourus de bas en haut, comme indiqué sur la figure. Le tore est alors obtenu de ce wedge en attachant l'intérieur du carré, homéomorphe à une cellule ouverte, puisque par définition de la relation d'équivalence, le quotient  $q: I \times I \rightarrow T^2$  se restreint à un homéomorphisme sur l'intérieur du carré.

Comment décrire l'application d'attachement ? Il s'agit d'identifier  $T^2$  avec un pushout de la forme  $S_a^1 \vee S_b^1 \leftarrow S^1 \rightarrow D^2$  après avoir identifié  $\square \approx S^1$  et  $I \times I \approx D^2$ . L'application d'attachement  $f$  se lit en parcourant le bord du carré, disons en partant de  $(0, 1)$  dans le sens trigonométrique inverse. En effet cette application correspond précisément au quotient  $S^1 \approx \square \rightarrow S_a^1 \vee S_b^1$  ce qui revient à concaténer les lacets  $a \star b \star \bar{a} \star \bar{b}$ . L'inclusion  $S_a^1 \vee S_b^1 \hookrightarrow T^2$  et le quotient  $I \times I \rightarrow T^2$  sont compatibles

avec cette application dans le sens où le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \square & \longrightarrow & I \times I \\ \downarrow & & \downarrow q \\ S_a^1 \vee S_b^1 & \xrightarrow{i} & T^2 \end{array}$$

On a donc, après avoir remplacé le carré et son bord par les espaces homéomorphes disque et cercle, une application induite par la propriété universelle du pushout  $(S_a^1 \vee S_b^1) \cup_f e^2 \rightarrow T^2$ . Cette application est une bijection d'un espace compact vers un espace séparé, c'est donc un homéomorphisme.

Pour conclure, on se souvient que le type d'homotopie du recollement ne dépend que de l'application d'attachement à homotopie près. La concaténation des lacets induisant la structure de groupe du groupe fondamental, on comprend que la classe d'homotopie  $[f]$  est le *commutateur*  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in \pi_1(S_a^1 \vee S_b^1)$ , où  $\alpha$  est la classe du lacet  $[a]$  et  $\beta = [b]$ .

Pour construire de nouvelles surfaces plus compliquées à partir de surfaces “élémentaires”, l'opération de somme connexe sera bien utile. En fait nous allons voir que cette opération permet de construire toutes les surfaces à partir de deux surfaces “élémentaires”, le tore et le plan projectif, mais il faudra attendre le chapitre 4 pour cela...

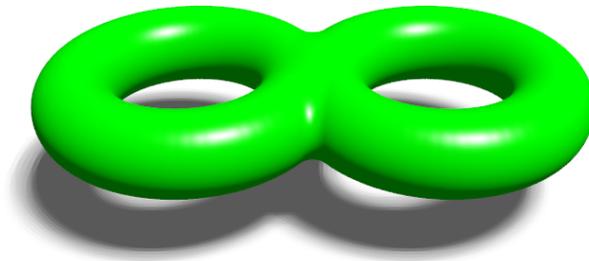
**DÉFINITION 6.3.** Soient  $S$  et  $T$  deux surfaces,  $s \in U \subset S$ ,  $t \in V \subset T$ , deux voisinages ouverts homéomorphes à des disques ouverts et dont les bords sont homéomorphes à des cercles. La *somme connexe*  $S\#T$  est l'espace quotient obtenu de  $(S \setminus U) \amalg (T \setminus V)$  en identifiant  $\partial U$  avec  $\partial V$  via un homéomorphisme.

Les bords de  $U$  et de  $V$  sont homéomorphes à un cercle, on peut donc composer l'un de ces homéomorphismes avec l'inverse de l'autre pour obtenir  $f: \partial U \rightarrow \partial V$  et on identifiera tout point de  $\partial U$  avec  $f(u) \in \partial V$ . Dans ce cours nous nous satisfaisons de la construction décrite ci-dessus, mais dans un cours de géométrie on montrerait que  $S\#T$  est encore une surface et que celle-ci ne dépend pas des choix qui ont été faits : ni des points, ni des voisinages... On trouvera plus de détails sur cela dans le livre de Lee, *Introduction to Topological Manifolds*. Pour généraliser cette

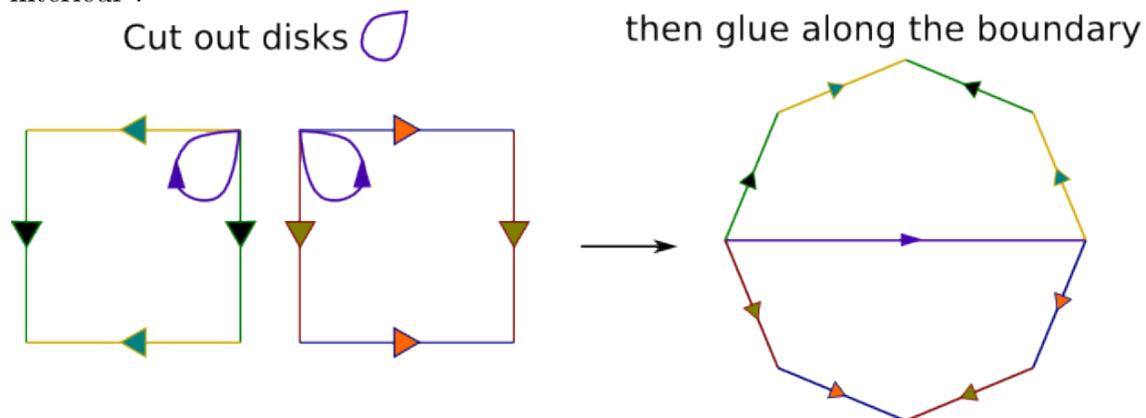
construction en dimension  $> 2$  il faut tenir compte de l'orientation du bord des voisinages. La théorie repose sur le Théorème du disque de Palais (1960).

On observe que la sphère  $S^2$  est un élément neutre pour cette opération :  $S^2 \# S \approx S$  pour toute surface  $S$ .

EXEMPLE 6.4. On suit le procédé pour  $S = T = T^2$  et on obtient un tore à deux trous.



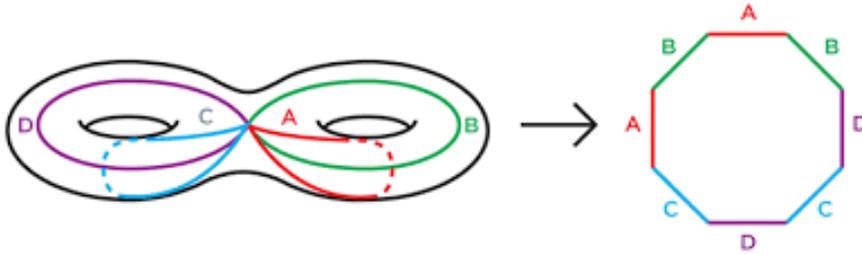
Expliquons cela pas à pas. Le tore est un carré dont on identifie les paires de côtés parallèles. On choisit le point  $[(1/5; 1/5)]$  et un voisinage dont le bord est un lacet comme montré sur le dessin suivant (Victor Protsak, Cornell) et on enlève son intérieur :



L'opération indiquée par une flèche est mieux comprise si on imagine d'abord que l'on sépare le point de départ et d'arrivée du lacet pour obtenir un pentagone (sans oublier qu'il faudra les identifier à nouveau par la suite). La même opération

se fait également avec l'autre tore si bien que la somme connexe est un quotient de deux pentagones. Autrement dit on utilise la technique du quotient en deux temps pour décrire la somme connexe non pas comme le quotient de deux tores troués, mais comme deux pentagones que l'on recolle et ensuite on fera les identifications nécessaires sur les côtés des carrés. On identifie les côtés des carrés d'origine comme pour le tore et également les nouveaux côtés, entre eux (comme sur le dessin), par définition de la somme connexe. Ceci explique pourquoi la somme connexe est un quotient d'un octaèdre. On se rassure en vérifiant que les deux extrémités des segments correspondants au bord du voisinage sont bien identifiés.

En conclusion  $T^2 \# T^2$  est un espace dont une structure cellulaire peut être décrite par  $(S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1) \cup_f e^2$ .



Le wedge de quatre cercles correspond au quotient du bord de l'octaèdre. Le même argument que pour le tore, basé sur la propriété universelle du pushout, la compacité et Hausdorffitude, permet ensuite de montrer que  $T^2 \# T^2$  est homéomorphe à  $(S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1) \cup_f e^2$ . On peut finalement identifier l'application d'attachement  $f$  qui est un lacet dans le wedge de cercles. Par construction c'est l'application  $S^1 \rightarrow S_a^1 \vee S_b^1 \vee S_c^1 \vee S_d^1$  donnée à homéomorphisme près par l'application quotient  $q$  restreinte au bord de l'octaèdre. L'indice de chaque cercle correspond au côté portant la même lettre sur l'octaèdre.

Choisissons un point de base sur l'octaèdre, disons le sommet situé entre  $A$  et  $C$  ci-dessus. Un générateur de  $\pi_1 S^1$  est alors donné par le lacet qui parcourt le bord de l'octaèdre en partant de ce sommet dans le sens trigonométrique, i.e.

$$c' \star d' \star \bar{c}'' \star \bar{d}'' \star b' \star a' \star \bar{b}'' \star \bar{a}''$$

Pour distinguer les chemins on choisit d'appeler  $a'$  et  $a''$  les chemins parcourus sur les deux côtés identifiés portant la lettre  $A$  sur le dessin, le sens de ces chemins explique

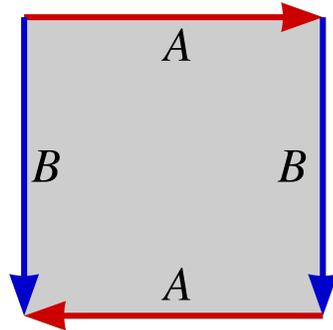
les barres pour indiquer lesquels sont parcourus en sens inverse. Si  $a$  est le chemin  $q \circ a' = q \circ a''$  dans le quotient, on obtient alors

$$c \star d \star \bar{c} \star \bar{d} \star b \star a \star \bar{b} \star \bar{a}$$

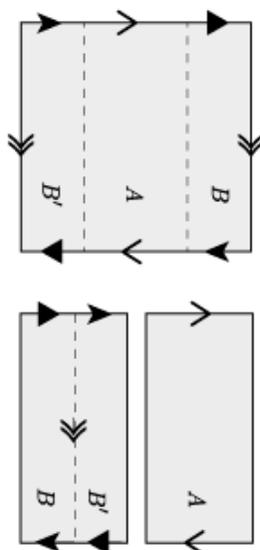
Or, chacun de ces chemins est un lacet dans le wedge de cercles, la lettre correspondant à l'indice utilisé. Comme la concaténation induit la structure de groupe dans le groupe fondamental, on voit que l'application d'attachement est représentée par le lacet dont la classe d'homotopie est le commutateur  $[\gamma, \delta][\beta, \alpha] \in \pi_1(S_a^1 \vee S_b^1 \vee S_c^1 \vee S_d^1)$ . La lettre grecque  $\alpha = [a]$ ,  $\beta = [b]$ , etc.

Un autre choix de point de base sur le bord de l'octogone donnerait un autre mot en  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

EXEMPLE 6.5. La bouteille de Klein  $K$  est obtenue par le quotient suivant :



Ainsi  $K$  admet une présentation cellulaire de la forme  $(S^1 \vee S^1) \cup e^2$ . L'application d'attachement est décrite ici par  $abab^{-1}$ . Si on recolle d'abord les côtés  $B$  on obtient un cylindre dont on doit identifier encore les bases, en les parcourant l'une dans un sens, et l'autre dans l'autre sens. Pour avoir une meilleure intuition géométrique de cette surface non orientable (qui ne se plonge pas dans  $\mathbb{R}^3$ ), on peut la décomposer en deux parties connues. Coupons le carré ci-dessus le long de deux segments verticaux se trouvant au quart et aux trois quarts de la distance horizontalement. On recolle les côtés  $B$  pour se retrouver avec deux bandes dont il faut identifier les côtés horizontaux comme indiqué par les flèches et les côtés verticaux que nous venons de couper :



Il s'agit de deux bandes de Möbius que l'on recolle le long de leur bord. Le plan projectif est formé d'une bande de Möbius et d'un disque, alors que la bouteille de Klein est formée de deux bandes de Möbius.



## Chapitre 3

### Théorie des groupes combinatoires

Dans ce chapitre notre but est de donner quelques compléments de théorie des groupes. Nous commençons avec des rappels sur les groupes libres, parlons de présentations de groupes, puis étudierons la notion de pushout de groupes. Une fois cet outil puissant en mains nous serons à même de calculer le groupe fondamental de nombreux espaces : espaces projectifs, réels ou complexes, surfaces orientables ou non, etc. Ce sera le programme pour le chapitre suivant

#### 1. Groupes libres

Intuitivement un groupe libre est formé à partir d'un choix de générateurs, souvent appelés  $x_i$  et indexés par un ensemble d'indices  $I$ , fini ou non, qu'on utilise pour former tous les éléments qui doivent se trouver dans ce groupe pour que les axiomes soient satisfaits, mais sans ajouter aucune autre *relation* qui ne serait pas imposée par ces axiomes.

EXEMPLE 1.1. Si on choisit  $I = \emptyset$ , alors le groupe libre à zéro générateurs est le groupe trivial 1. Si on choisit un générateur  $x$ , alors on doit forcément introduire son inverse  $x^{-1}$  et tous les produits finis possibles si bien qu'on obtient un ensemble  $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Le produit  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$  munit cet ensemble d'une structure de groupe si bien qu'il mérite le nom de groupe libre à un élément. Ce groupe est isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$  via l'isomorphisme  $x^n \mapsto n$ . Il jouit de la propriété caractéristique suivante :

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G$$

Explicitement un homomorphisme  $f$  vers un groupe arbitraire  $G$  est entièrement déterminé par l'image  $f(1) = g$ , et inversement tout élément de  $G$  définit un homomorphisme  $f: \mathbb{Z} \rightarrow G$  (on pose  $f(n) = g^n$ ).

Formellement on définit un groupe libre en général par le foncteur adjoint de l'oubli  $\mathcal{O}: \text{Groupes} \rightarrow \text{Ensembles}$ , qui associe à un groupe  $G$  l'ensemble sous-jacent constitué de ses éléments.

DÉFINITION 1.2. Soit  $F: \text{Ensembles} \rightarrow \text{Groupes}$  le foncteur adjoint à gauche de  $\mathcal{O}$ . On appelle *groupe libre* tout groupe de la forme  $F(I)$  où  $I$  est un ensemble, dont les éléments s'appellent les *générateurs* de  $F(I)$ .

Pour des questions de commodité d'écriture on aime associer à tout  $\alpha \in I$  un élément  $x_\alpha$ , et explicitement  $F(I)$  est alors l'ensemble formé des mots  $x_{\alpha_1}^{n_1} \dots x_{\alpha_k}^{n_k}$ , pour  $x_{\alpha_i} \in I$  et  $n_i \in \mathbb{Z}$ . La loi de composition est la concaténation des mots et le neutre est donné par le mot vide, qu'on écrit 1. Pour que ceci définisse bien une structure de groupe, on doit imposer la relation  $x_\alpha x_\alpha^{-1} = 1$ , c'est-à-dire que  $F(I)$  est le quotient de l'ensemble de tous les mots par la relation d'équivalence engendrée par  $x_\alpha x_\alpha^{-1} \sim 1$  et  $x_\alpha^{-1} x_\alpha \sim 1$  pour tout  $\alpha \in I$ . Tout mot est équivalent à un mot ne contenant aucune juxtaposition d'un générateur suivi ou précédé de son inverse et on appelle un tel mot *réduit*, c'est sous cette forme qu'on représente généralement un élément de  $F(I)$ .

Par définition, on a une caractérisation de  $F(I)$  par la propriété d'adjonction.

PROPOSITION 1.3. On a une bijection d'ensemble  $\text{Hom}(F(I), G) \cong G^I$ .

DÉMONSTRATION. En effet  $\text{Hom}(F(I), G) \cong \text{mor}(I, \mathcal{O}(G))$  par adjonction. Or, un morphisme d'ensembles de  $I$  vers  $\mathcal{O}(G)$  correspond à la donnée d'un élément  $g_\alpha$  pour tout  $\alpha \in I$ .  $\square$

EXEMPLE 1.4. Soit  $I$  un ensemble à deux éléments et  $F(2)$  le groupe libre associé. On appelle  $a$  et  $b$  les générateurs puisqu'on peut ici se passer de la lourdeur des indices. Les éléments de  $F(2) = F(a, b)$  sont les mots de la forme  $a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \dots a^{n_k} b^{m_k}$  pour  $k \geq 1$ ,  $n_i, m_i \in \mathbb{Z}$  pour tous  $1 \leq i \leq k$  et seuls  $n_1$  et  $m_k$  peuvent être nuls. De cette manière on impose que ces mots sont réduits.

Les mots  $ab^2a^{-1}$  et  $ababa$  sont deux éléments de  $F(a, b)$ , représentés par des mots réduits. La multiplication étant définie par la juxtaposition, on obtient le produit suivant que l'on réduit grâce aux identifications mentionnées ci-dessus :

$$ab^2a^{-1} \cdot ababa = ab^2a^{-1}ababa = ab^2baba = ab^3aba$$

## 2. Présentations de groupes

Soit  $G$  un groupe (discret),  $I$  un ensemble fini ou non, et  $\{g_\alpha \mid \alpha \in I\}$  des générateurs du groupe  $G$ . On a donc un homomorphisme de groupes surjectifs  $F(I) = \ast_{\alpha \in I} \mathbb{Z} \rightarrow G$  qu'on définit en envoyant le  $\alpha$ -ème générateur  $x_\alpha$  sur  $g_\alpha$ .

**DÉFINITION 2.1.** Les éléments du noyau de  $F(I) \rightarrow G$  sont appelés *relateurs* et un choix  $\{r_\beta \mid \beta \in J\}$  de générateurs de ce noyau donne lieu à une *présentation* de  $G$  par générateurs et relateurs. On écrit  $G \cong \langle x_\alpha, \alpha \in I \mid r_\beta, \beta \in J \rangle$ .

**REMARQUE 2.2.** Chaque relateur est un élément du groupe libre  $F(I)$ , il s'écrit donc comme un mot en les générateurs  $x_\alpha$  et c'est sous cette forme que l'on indiquera les relateurs dans la présentation. Le premier Théorème d'isomorphisme pour les groupes garantit que le quotient de  $F(I)$  par le sous-groupe normal engendré par les relateurs est isomorphe à  $G$ .

**EXEMPLE 2.3.** Le groupe trivial admet une présentation "vide" puisque  $F(\emptyset) = 1$  dont le seul élément est le mot vide. En général tout groupe admet de nombreuses présentations, par exemple  $\langle x \mid x^2, x^3 \rangle$  décrit aussi le groupe trivial.

Le groupe cyclique  $C_n$  admet  $\langle x \mid x^n \rangle$  comme présentation puisque le quotient du groupe libre à un seul générateur  $F(x)$  par le sous-groupe normal engendré par  $x^n$  est un groupe cyclique d'ordre  $n$ .

**EXEMPLE 2.4.** Le groupe abélien libre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est engendré par deux éléments  $(1; 0)$  et  $(0; 1)$ . Le groupe libre  $F(x, y)$  à deux générateurs se surjecte sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  et le noyau est engendré par le relateur qui indique la relation de commutativité entre les deux générateurs. L'élément  $xyx^{-1}y^{-1}$  appartient au noyau de cet homomorphisme puisque son image est  $(1; 0) + (0; 1) - (1; 0) - (0; 1) = (0; 0)$ . Ainsi  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$ .

Je profite de cet exemple pour mettre en évidence la différence entre le sous-groupe de  $F(x, y)$  engendré par le mot  $w = xyx^{-1}y^{-1}$  et le sous-groupe *normal*  $N$  engendré par ce même mot. En effet le premier est un groupe cyclique d'ordre infini formé de toutes les puissances  $w^n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ , mais ce sous-groupe n'est pas normal (par exemple  $xwx^{-1}$  ne s'y trouve pas). Pour former un quotient dans la catégorie

des groupes on doit quotienter par un sous-groupe normal et on forme alors  $N$  en ajoutant tous les produits de conjugués de  $w^n$ .

Le groupe symétrique  $S_3$  est engendré par les transpositions (12) et (23). Les relations qui nous permettent d'écrire une présentation sont  $(12)^2 = (23)^2 = id$ , autrement dit les transpositions sont des éléments d'ordre 2, et  $(12)(23) = (123)$  est un élément d'ordre 3, i.e.  $[(12)(23)]^3 = id$ .

LEMME 2.5. *On a un isomorphisme  $S_3 \cong \langle x, y \mid x^2, y^2, (xy)^3 \rangle$ .*

DÉMONSTRATION. Appelons  $G$  le groupe donné par cette présentation. Pour démontrer que  $S_3 \cong G$ , on constate que le choix des générateurs définit un homomorphisme surjectif  $F(x, y) \rightarrow S_3$ . Comme  $x^2, y^2, (xy)^3$  appartiennent au noyau par construction, cet homomorphisme passe au quotient et définit un homomorphisme surjectif  $G \rightarrow S_3$ . Il reste à montrer l'injectivité. Un élément de  $G$  est représenté par un mot en  $x$  et  $y$ . Les relateurs  $x^2$  et  $y^2$  montrent qu'on peut toujours se restreindre à un mot de la forme  $xyxy \dots x$  ou  $xyxy \dots y$  s'il commence par  $x$  ou  $yxyx \dots x$  ou  $yxyx \dots y$  sinon. En effet toute puissance  $x^n$  peut être réduite modulo 2 dans  $G$  et on observe aussi que  $\bar{x}^2 = 1$  implique que  $\bar{x}^{-1} = \bar{x}$ .

Le relateur  $xyxyxy$  indique enfin que  $\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{y} = 1$  dans  $G$ . Ainsi  $\bar{x}\bar{y}\bar{x} = \bar{y}\bar{x}\bar{y}$ . On a donc six mots de moins d'au plus trois lettres  $1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}\bar{x}$  et  $\bar{x}\bar{y}\bar{x}$ . Ils sont tous différents car les images dans  $S_3$  le sont. Dès qu'un mot a plus de trois lettres on peut réduire le nombre de lettres en utilisant la relation  $\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$  ou  $\bar{y}\bar{x}\bar{y}\bar{x} = \bar{x}\bar{y}$ . Le groupe  $G$  est donc constitué d'exactly six éléments, c'est  $S_3$ .  $\square$

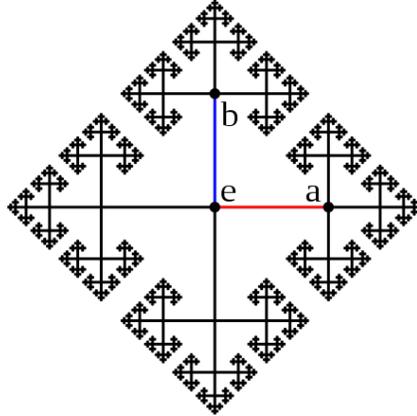
Les méthodes décrites dans cette section sont utiles dans les deux sens. Si on connaît un groupe on peut vouloir en donner une présentation pour le comprendre et travailler avec. Réciproquement on peut créer de nouveaux groupes en indiquant un nombre de générateurs et une famille de relations que ceux-ci vérifient.

### 3. Le graphe de Cayley

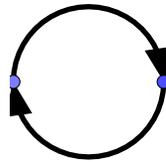
Dans cette courte section nous introduisons la notion de graphe de Cayley qui permet d'appréhender géométriquement la signification d'une présentation.

DÉFINITION 3.1. Soit  $G$  un groupe et  $S$  un ensemble de générateurs. Le *graphe de Cayley* de  $G$  associé à  $S$  est le graphe coloré  $\Gamma = \Gamma(G, S)$  dont les sommets sont les éléments du groupe, les couleurs sont les générateurs, et les arêtes orientées de couleur  $s \in S$  relient un sommet  $g$  au sommet  $gs$ .

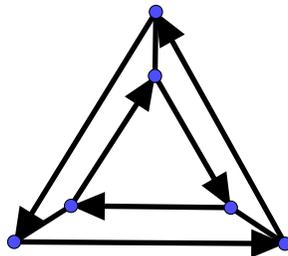
Voici le graphe de Cayley du groupe libre  $F(a, b)$  :



On choisira d'indiquer l'orientation par une flèche sur l'arête, sauf pour des générateurs d'ordre 2 auquel cas on ne surchargera pas le dessin en indiquant simplement une arête non orientée au lieu d'une boucle. Ainsi le graphe de  $C_2$  donné par la présentation  $\langle x \mid x^2 \rangle$  est simplement un intervalle plutôt qu'une boucle :



EXEMPLE 3.2. Le graphe de Cayley de  $S_3$  associé aux générateurs  $(12)$  et  $(23)$  est alors un hexagone dont les arêtes bicolores s'alternent. Si on avait choisi plutôt  $(12)$  et  $(123)$  comme générateurs on obtiendrait un tout autre graphe de Cayley :



Les lacets dans le graphe issus de l'élément neutre correspondent à des relations.

#### 4. Le produit libre

On introduit une première construction qui consiste à “mettre ensemble” deux groupes sans imposer aucune autre relation que d'identifier les deux éléments neutres. Cette identification est nécessaire pour former un groupe et dans ce sens on voit peut-être l'analogie avec le wedge qui consistait à n'identifier que le strict minimum pour recoller deux espaces donnés. Cette construction est facile à définir dans le langage de la théorie des groupes combinatoire.

**DÉFINITION 4.1.** Soit  $G$  un groupe donné par une présentation  $\langle x_\alpha, \alpha \in I \mid r_\beta, \beta \in J \rangle$  et  $H$  un groupe donné par une présentation  $\langle y_\gamma, \gamma \in K \mid s_\delta, \delta \in L \rangle$ . Le *produit libre* ou *amalgame*  $G * H$  est le groupe donné par la présentation  $\langle x_\alpha, y_\gamma \mid r_\beta, s_\delta \rangle$ .

**LEMME 4.2.** *Il existe des homomorphismes de groupes injectifs  $i: G \rightarrow G * H$  et  $j: H \rightarrow G * H$ .*

**DÉMONSTRATION.** Définissons  $i$  par exemple. Soit  $g \in G$ . Il existe alors un mot  $w$  dans le produit libre  $F(I)$  qui représente  $g$ . Ecrivons pour insister sur les générateurs qui apparaissent dans ce mot que  $w = w(x_\alpha)$  et on pose  $i(g) = \bar{w}$ , la classe de  $w(x_\alpha)$  dans le groupe libre  $F(I \amalg K)$  modulo le sous-groupe normal engendré par les  $r_\beta$  et les  $r_\delta$ . Autrement dit on a construit un homomorphisme  $F(I) \rightarrow F(I \amalg K) \rightarrow G * H$ . Celui-ci passe au quotient puisque l'image de tout relateur  $r_\alpha$  est triviale. L'homomorphisme induit  $i$  est injectif puisque  $w(x_\alpha) = 1$  dans le quotient si et seulement  $w(x_\alpha) = 1$  dans  $G$ , aucune nouvelle relation en les  $x_\alpha$  n'étant introduite dans  $G * H$ . De manière plus convaincante peut-être on peut aussi considérer le quotient de  $G * H$  par le sous-groupe normal engendré par  $H$ , c'est-à-dire en introduisant les relations  $x_\gamma = 1$  pour tout  $\gamma$ . La présentation de ce groupe quotient montre qu'il est isomorphe à  $G$ . Ainsi  $q \circ i: G \rightarrow G * H \rightarrow G$  est l'identité si bien que  $i$  est injectif.  $\square$

L'existence de ces homomorphismes  $i$  et  $j$  nous permet d'énoncer la propriété universelle du produit libre, qui établit un lien formel entre cette construction et le

wedge d'espaces pointés ou la réunion disjointe d'espaces non pointés. Autrement dit le produit libre n'est rien d'autre que le *coproduit* dans la catégorie des groupes.

**PROPOSITION 4.3.** *Pour toute paire d'homomorphismes de groupes  $\varphi: G \rightarrow M$  et  $\psi: H \rightarrow M$ , il existe un unique homomorphisme de groupes  $\omega: G * H \rightarrow M$  tel que  $\omega \circ i = \varphi$  et  $\omega \circ j = \psi$ .*

**DÉMONSTRATION.** On se représente cela sous forme de diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \longrightarrow & H & & \\
 \downarrow & & \downarrow j & \searrow \psi & \\
 G & \xrightarrow{i} & G * H & \xrightarrow{\omega} & M \\
 & \searrow \varphi & & & 
 \end{array}$$

On pose  $\omega(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$  et  $\omega(y_\beta) = \psi(y_\beta)$  pour tous  $x_\alpha, y_\beta$ . Ceci définit un homomorphisme  $F(I \amalg K) \rightarrow M$  qui passe au quotient puisque  $\omega$  envoie les relateurs  $r_\beta$  sur  $\varphi(r_\beta) = 1$  et de même pour les relateurs  $r_\delta$ . L'unicité de  $\omega$  est claire.  $\square$

**EXEMPLE 4.4.** On construit le produit libre de deux groupes libres. Considérons  $G = H = F(1) \cong \mathbb{Z}$ . Alors  $F(1) * F(1)$  est un groupe libre  $F(2)$  à deux générateurs. En effet, appelons  $x$  le générateur de  $G$  et  $y$  celui de  $H$ . Alors, la construction de  $G * H = F(x) * F(y)$  donne la présentation  $\langle x, y \mid \emptyset \rangle$ , qui est celle de  $F(2)$ . Une autre approche serait d'utiliser la propriété universelle de ce produit libre qui affirme que tout homomorphisme de groupes  $F(x) * F(y)$  vers un groupe  $M$  est équivalente à la donnée de deux homomorphismes  $F(x) \rightarrow M$  et  $F(y) \rightarrow M$ . Or chacun d'eux est entièrement déterminé par l'image de  $x$ , respectivement celle de  $y$ . Autrement dit un tel morphisme correspond au choix de deux éléments  $m, n \in M$ . C'est précisément la propriété universelle de  $F(2)$ . En général  $F(n) * F(m) \cong F(n + m)$ .

**EXEMPLE 4.5.** Le groupe  $C_2 * C_2$  admet la présentation  $\langle x, y \mid x^2, y^2 \rangle$ . Ainsi les homomorphismes de  $C_2 * C_2$  vers un groupe arbitraire  $M$  correspondent au choix de deux éléments  $m, n \in M$  avec  $m^2 = 1 = n^2$ .

Si on ajoute le relateur  $xyx^{-1}y^{-1}$  on obtient le quotient  $C_2 \times C_2$ , ce qu'on peut aussi voir comme un quotient en deux temps du groupe libre  $F(2)$ , d'abord en

introduisant la relation  $xy = yx$  pour obtenir le groupe abélien libre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , puis les deux relations  $2x = 0 = 2y$ . Ainsi un homomorphisme de  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$  vers un groupe  $M$  correspond à la donnée de deux éléments  $m, n \in M$  qui sont d'ordre deux :  $m^2 = 1 = n^2$ , et qui commutent entre eux :  $mn = nm$ .

### 5. Amalgames ou pushouts

On travaille dans cette section avec deux homomorphismes de groupes  $\alpha: K \rightarrow G$  et  $\beta: K \rightarrow H$ . On construit le groupe le plus proche de  $G$  et  $H$  en faisant de sorte que  $\alpha(x)$  soit identifié avec  $\beta(x)$  pour tout  $x \in K$ .

**DÉFINITION 5.1.** Soit  $G \leftarrow K \rightarrow H$  deux homomorphismes de groupes. Le *pushout* ou *amalgame*  $G *_K H$  est le groupe quotient  $(G * H)/N$  où  $N$  est le sous-groupe normal engendré par  $\alpha(x)\beta(x)^{-1}$ .

Les inclusions  $G \rightarrow G *_K H$  et  $H \rightarrow G *_K H$  induisent des homomorphismes  $i: G \rightarrow G *_K H$  et  $j: H \rightarrow G *_K H$  et on peut énoncer alors la propriété universelle du pushout.

**PROPOSITION 5.2.** Pour toute paire d'homomorphismes de groupes  $\varphi: G \rightarrow M$  et  $\psi: H \rightarrow M$  tels que  $\varphi \circ \alpha = \psi \circ \beta$ , il existe un unique homomorphisme de groupes  $\omega: G *_K H \rightarrow M$  tel que  $\omega \circ i = \varphi$  et  $\omega \circ j = \psi$ .

**DÉMONSTRATION.** On se représente cela sous forme de diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{\beta} & H \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow j \\
 G & \xrightarrow{i} & G *_K H \\
 & \searrow \varphi & \dashrightarrow \omega \\
 & & M
 \end{array}$$

Par la Proposition 4.3 on a un unique homomorphisme  $\omega: G *_K H \rightarrow M$ . Celui-ci passe au quotient puisque  $\omega(\alpha(x)\beta(x)^{-1}) = 1$ . Ceci prouve l'existence.

L'unicité vient de la propriété universelle du produit libre et de celle du quotient. Plus précisément, si  $\omega'$  est un autre tel homomorphisme vers  $M$ , alors la composition  $G \xrightarrow{i} G *_K H \xrightarrow{\omega'} M$  doit être égale à  $\varphi$  par commutativité du diagramme

ci-dessus, et de même pour  $\psi: H \rightarrow M$ . Or ces deux homomorphismes déterminent complètement l'homomorphisme  $G * H \rightarrow G *_K H \xrightarrow{\omega'} M$  par la propriété universelle du produit libre et c'est le même pour  $\omega$ . L'homomorphisme induit sur le quotient est unique si bien que  $\omega = \omega'$ .  $\square$

REMARQUE 5.3. La propriété universelle caractérise le pushout à isomorphisme près. Autrement dit un groupe  $\Gamma$  admettant la propriété universelle décrite ci-dessus est isomorphe à  $G *_K H$ .

En effet ce groupe  $\Gamma$  est alors muni de deux homomorphismes  $I: G \rightarrow \Gamma$  et  $J: H \rightarrow \Gamma$  compatibles avec  $\alpha$  et  $\beta$ , et la propriété universelle permet d'obtenir un homomorphisme  $\gamma: \Gamma \rightarrow G *_K H$  qui fait commuter le diagramme semblable à celui de la Proposition 5.2 (par exemple  $\gamma \circ I = i$ ). Cette même proposition nous garantit l'existence d'un homomorphisme  $\omega: G *_K H \rightarrow \Gamma$ .

Regardons la composition  $\gamma \circ \omega$ . On prétend que comme l'identité de  $G *_K H$  elle fait commuter les triangles formés par les homomorphismes  $i$  et  $j$ . Il suffit en effet de calculer

$$\gamma \circ \omega \circ i = \gamma \circ I = i \quad \text{et} \quad \gamma \circ \omega \circ j = \gamma \circ J = j$$

Or, la propriété universelle garantit l'unicité de cet homomorphisme et on conclut que  $\gamma \circ \omega$  est l'identité. Le même argument, mais en utilisant la propriété universelle de  $\Gamma$  permet de montrer que  $\omega \circ \gamma = id_\Gamma$ . On a prouvé que  $\Gamma \cong G *_K H$ .

EXEMPLE 5.4. Si  $K = 1$  on retrouve le produit libre  $G * H$ . Si  $H = 1$  on obtient le quotient de  $G$  par le sous-groupe normal engendré par  $K$ . En effet  $G * 1 \cong G$  et  $N = \langle K \rangle$  avec les notations de la Définition 5.1.

Ainsi le pushout du diagramme  $1 \leftarrow C_2 \rightarrow S_3$  est le groupe trivial, alors que le pushout du diagramme  $1 \leftarrow C_3 \rightarrow S_3$  est le groupe cyclique  $C_2$ .



## Le Théorème de Seifert-van Kampen

Nous arrivons ici au coeur de la théorie de l'homotopie après les préparatifs de nature topologiques (les quotients) et de théorie des groupes (combinatoire). Notre but est de prouver le Théorème de Seifert et van Kampen qui permet de calculer le groupe fondamental d'un recollement d'espaces par une construction entièrement algébrique. Nous serons à même de calculer le groupe fondamental de nombreux espaces : des wedges, des recollements de cellules, et en particulier les espaces projectifs, réels ou complexes, surfaces orientables ou non, etc. En fait le groupe fondamental des surfaces est capable de les distinguer entre elles, ce qui nous amènera à parler du Théorème de classification des surfaces.

### 1. Le groupe fondamental d'un recollement

L'objectif de cette section est de calculer le groupe fondamental d'un recollement de deux espaces. Nous allons supposer dans cette section que  $X = A \cup B$  est la réunion de deux sous-espaces ouverts  $A$  et  $B$  dont l'intersection  $A \cap B = C$  est un sous-espace connexe par arcs (et ouvert). On choisit un point de base  $x_0 \in C$  qu'on utilise comme point de base pour chacun des quatre espaces,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $X$ . Chaque inclusion  $i: A \hookrightarrow X$  et  $j: B \hookrightarrow X$  induit un homomorphisme  $i_*: \pi_1 A \rightarrow \pi_1 X$  et  $j_*: \pi_1 B \rightarrow \pi_1 X$  respectivement. Par la propriété universelle de la somme amalgamée on obtient alors un homomorphisme  $\phi: \pi_1 A * \pi_1 B \rightarrow \pi_1 X$ .

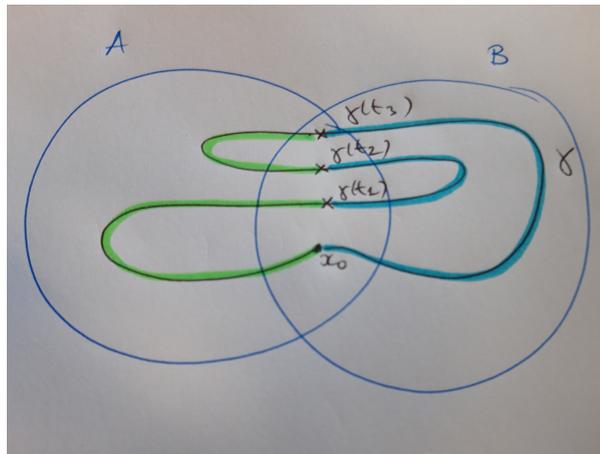
LEMME 1.1. *L'homomorphisme  $\phi: \pi_1 A * \pi_1 B \rightarrow \pi_1 X$  est surjectif.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\gamma: I \rightarrow X$  un lacet basé en  $x_0$ . Notre but est de découper ce lacet en petits chemins entièrement contenus soit dans  $A$ , soit dans  $B$ . La première partie de la preuve suit l'argument des vidéos, un peu plus long que celui proposé ensuite qui repose sur l'existence d'un nombre de Lebesgue. Les deux approches se rejoignent alors pour conclure de la même manière.

**Approche 1.** Pour tout  $0 \leq t \leq 1$ , le point  $\gamma(t)$  se trouve soit dans  $A$ , soit dans  $B$ , la préimage par  $\gamma$  de l'ouvert  $A$  ou  $B$  est donc un voisinage ouvert de  $t$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ . On choisit un intervalle ouvert  $U_t = (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  contenu dans ce voisinage si bien que nous avons recouvert  $I$  avec des intervalles ouverts  $U_t$  ayant la propriété que  $\gamma(U_t)$  est entièrement contenu dans l'un des ouverts  $A$  ou  $B$ . Par compacité de  $I$  on extrait un recouvrement fini.

Ordonnons ces intervalles ouverts par ordre croissant des origines : Ces intervalles sont alors  $[0, s_1), (s_2, s_3), \dots, (s_{2k}, 1]$  et vérifient  $0 < s_2 < s_4 < \dots < s_{2k}$ . Quitte à enlever des ouverts superflus on peut bien supposer que  $s_{2j} \neq s_{2j+2}$ . Puisque c'est un recouvrement de  $I$ , on a aussi  $s_1 > s_2$  et à nouveau, quitte à enlever des intervalles, on peut supposer que  $s_3 > s_1$ . De même on pourrait fusionner deux intervalles consécutifs si les images par  $\gamma$  sont contenues dans le même ouvert  $A$  ou  $B$  si bien qu'on obtient finalement une suite d'intervalles dont les images par  $\gamma$  s'alternent dans  $A$  et  $B$ .

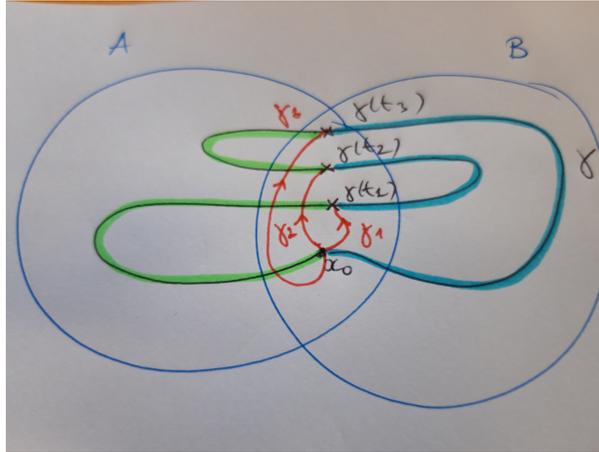
En particulier les intersections  $(s_{2j-1}, s_{2j})$  sont envoyées dans  $C = A \cap B$ . On peut alors associer au recouvrement, en choisissant un point  $t_j \in (s_{2j-1}, s_{2j})$ , une partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de sorte que l'image de l'intervalle fermé  $[t_{i-1}, t_i]$  est entièrement contenue dans  $A$  ou  $B$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et les images de deux intervalles adjacents ne sont pas contenues dans le même ouvert.



**Approche 2.** Le recouvrement de l'intervalle  $I$ , compact et métrique, par les deux ouverts  $\gamma^{-1}(A)$  et  $\gamma^{-1}(B)$  admet un nombre de Lebesgue  $\delta$ . Ainsi tout intervalle dans  $I$  de longueur  $< \delta$  est entièrement contenu dans l'un des deux ouverts. C'est

en particulier le cas pour les intervalles  $[k/m, (k+1)/m]$  pour tout  $0 \leq k \leq m-1$  si on choisit un entier  $m > \delta^{-1}$ . Quitte à concaténer les intervalles consécutifs dont les images sont contenues dans le même ouvert  $A$  ou  $B$ , on peut se ramener à une partition de  $I$  de la forme  $0 < t_1 = k_1/m < t_2 = k_2/m \cdots < t_n = 1$  de sorte à découper le lacet  $\gamma$  en tronçons qui s'alternent dans  $A$  et dans  $B$ , comme sur le dessin ci-dessus.

Pour transformer ce découpage en concaténation de lacets, on procède comme suit. Par connexité par arcs de  $A \cap B = C$  on choisit des chemins  $\gamma_i$  entièrement contenus dans  $C$  reliant  $x_0$  à  $\gamma(t_i)$  pour  $1 \leq i \leq n-1$ . On appelle  $\bar{\gamma}_i$  le chemin inverse.



Appelons encore  $\gamma^i$  le chemin parcouru par  $\gamma$  entre le temps  $t_{i-1}$  et  $t_i$ . Après reparamétrisation cela correspond donc au chemin  $t \mapsto \gamma(t \cdot (t_i - t_{i-1}) + t_{i-1})$ . Ceci nous permet de construire des lacets  $\gamma^1 \star \bar{\gamma}_1$ , puis  $\gamma_1 \star \gamma^2 \star \bar{\gamma}_2, \dots, \gamma_{n-2} \star \gamma^{n-1} \star \bar{\gamma}_{n-1}$  et enfin  $\gamma_{n-1} \star \gamma^n$ . La concaténation de ces lacets donne le lacet  $\gamma$  à homotopie près, puisque  $\bar{\gamma}_i \star \gamma_i$  est homotope au lacet constant.

Par conséquent la classe d'homotopie  $[\gamma]$  est égale au produit des classes d'homotopie

$$[\gamma^1 \star \bar{\gamma}_1] \cdot [\gamma_1 \star \gamma^2 \star \bar{\gamma}_2] \cdots [\gamma_{n-2} \star \gamma^{n-1} \star \bar{\gamma}_{n-1}] \cdot [\gamma_{n-1} \star \gamma^n]$$

Chacun de ces lacets est par construction entièrement contenu dans  $A$  ou dans  $B$ , autrement dit chacun se trouve soit dans l'image de  $i_*$ , soit dans l'image de  $j_*$ . Ainsi  $[\gamma]$  appartient à l'image de  $\phi$ .  $\square$

Il s'agit maintenant d'identifier le noyau de  $\phi: \pi_1 A * \pi_1 B \rightarrow \pi_1 X$ . Pour mettre clairement en relation les groupes qui jouent un rôle dans la preuve, assez complexe, du Théorème de Seifert-van Kampen, observons que l'amalgame  $\pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B$  avec lequel nous allons identifier  $\pi_1 X$  est obtenu comme pushout du diagramme suivant, où on note  $\alpha: C \hookrightarrow A$  et  $\beta: C \hookrightarrow B$  les inclusions :

$$\pi_1 A \xleftarrow{\alpha_*} \pi_1 C \xrightarrow{\beta_*} \pi_1 B$$

Par construction, l'espace  $X$  est quant à lui le pushout (recollement) du diagramme suivant à gauche

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \downarrow \beta & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{i} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1 C & \xrightarrow{\alpha_*} & \pi_1 A \\ \downarrow \beta_* & & \downarrow i_* \\ \pi_1 B & \xrightarrow{j_*} & \pi_1 X \end{array}$$

qui induit, en appliquant le foncteur  $\pi_1$  le carré commutatif à droite. Il existe donc un homomorphisme  $\bar{\phi}: \pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B \rightarrow \pi_1 X$  par la propriété universelle du pushout (de groupes), dont la précomposition avec le quotient  $q: \pi_1 A * \pi_1 B \rightarrow \pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B$  est exactement l'homomorphisme  $\phi$  construit ci-dessus puisqu'il coïncide avec  $i_*$  sur  $\pi_1 A$  et  $j_*$  sur  $\pi_1 B$  (et on conclut par la propriété universelle du produit libre). Autrement dit l'homomorphisme  $\phi$  factorise par l'amalgame et nous voulons montrer que  $\bar{\phi}$  est un isomorphisme.

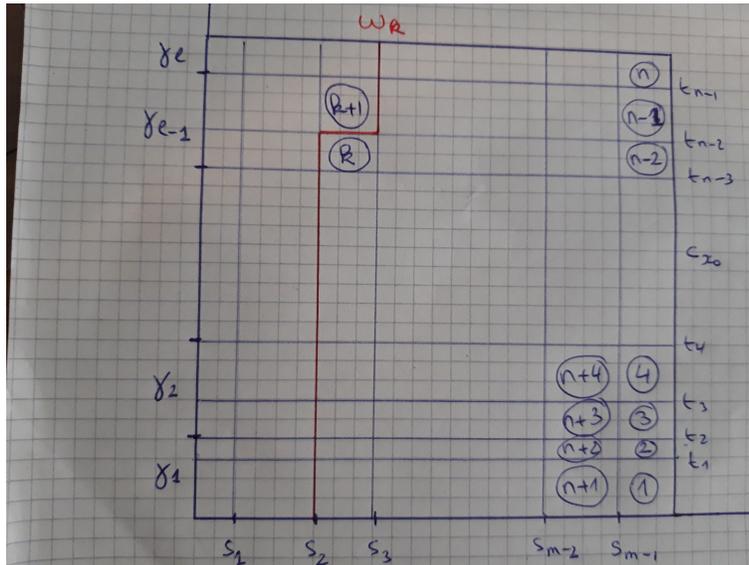
**THÉORÈME 1.2.** *Soient  $A, B \subset X$  deux ouverts d'un espace  $X$  tels que  $X = A \cup B$  et  $C = A \cap B$  est connexe par arcs. Alors  $\pi_1 X \cong \pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B$ .*

**DÉMONSTRATION.** Puisque l'homomorphisme  $\phi: \pi_1 A * \pi_1 B \rightarrow \pi_1 X$  est surjectif par le Lemme 1.1, il reste à montrer que le noyau de  $\phi$  est le sous-groupe normal  $N$  engendré par  $\alpha_*(c)\beta_*^{-1}(c)$  pour  $c \in \pi_1 C$ .

Soit  $[\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_\ell]$  des classes d'homotopie de lacets basés en  $x_0$  et entièrement contenus soit dans  $A$ , soit dans  $B$ . On suppose que la concaténation  $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_\ell$  est contractile dans  $X$ , i.e. le produit  $[\gamma_1] \dots [\gamma_\ell]$  est un élément du produit libre  $\pi_1 A * \pi_1 B$  se trouvant dans le noyau de  $\phi$ . On va prouver que cet élément appartient à  $N = \ker q$ , autrement dit que  $\gamma = 1$  dans l'amalgame  $\pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B$ .

Soit  $H: I \times I \rightarrow X$  une homotopie de  $\gamma = H(0, -)$  vers  $c_{x_0} = H(1, -)$ . Observons que  $H(s, 0) = H(s, 1) = x_0$  pour tout  $s \in I$  puisque cette homotopie est pointée (entre des lacets basés en  $x_0$ ). On procède maintenant pour le carré  $I \times I$  comme pour l'intervalle dans le lemme ci-dessus. On choisit donc pour chaque point  $(s, t)$  un rectangle ouvert centré en  $(s, t)$  dont l'image est entièrement contenue dans  $A$  ou dans  $B$ . Par compacité on extrait de ce recouvrement ouvert un recouvrement fini par des rectangles dont la clôture est envoyée dans  $A$  ou dans  $B$ , ce qui est possible quitte à réduire la taille des rectangles ouverts choisis précédemment.

Soit  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m-1} < s_m = 1$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  les coordonnées des bords de tous les rectangles. De cette manière chaque rectangle  $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  est contenu dans l'un des rectangles du recouvrement fini, si bien que l'homotopie  $H$  envoie  $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$  soit dans  $A$ , soit dans  $B$ . Quitte à raffiner cette partition on peut supposer que les  $s_i$  contiennent les points séparant les lacets  $\gamma_k$ , autrement dit chaque  $\gamma_k$  est parcouru sur un intervalle de la forme  $[s_{i_{k-1}}, s_{i_k}]$ . Nous numérotons maintenant les  $mn$  rectangles de bas en haut et de droite à gauche. Pour tout  $0 \leq k \leq mn$  nous définissons un chemin dans  $I \times I$  de sorte que



- (1) il part de  $(s_i, 0)$  et arrive en  $(s_i, 1)$  ou  $(s_{i-1}, 1)$ ;
- (2) il sépare les  $k$  premiers rectangles des  $mn - k$  autres;
- (3) il parcourt uniquement des tronçons verticaux ou horizontaux.

L'image par  $H$  d'un tel chemin est un lacet basé en  $x_0$ , appelons le  $\omega_k$  et remarquons que  $\omega_0 = c_{x_0}$  et  $\omega_{mn} = \gamma$ . Pour chacun des sommets  $P$  des rectangles on choisit un chemin  $\theta_P$  reliant  $x_0$  à  $H(P)$  en choisissant le chemin constant si  $H(P) = x_0$  (ce qui est le cas sur le bord  $s = 1$  et aux extrémités des lacets  $\gamma_r$  par exemple), un chemin entièrement contenu dans  $A$ ,  $B$  ou  $C$  selon que  $H(P)$  appartient à  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . En précomposant et en postcomposant avec les chemins  $\gamma_P$  et  $\bar{\gamma}_Q$  correspondants on décompose  $\omega_k$  en un produit de lacets. On observe que dès qu'un sommet  $P$  est partagé par des rectangles dont les images par  $H$  se trouvent l'un dans  $A$  et l'autre dans  $B$ , alors forcément  $H(P) \in C$ . En particulier le chemin choisi de  $x_0$  à un tel point est entièrement contenu dans  $C$ .

Analysons maintenant ce qui se passe lorsqu'on passe de  $\omega_k$  à  $\omega_{k+1}$  et montrons par récurrence sur  $k$  que  $\omega_{k+1}$  et  $\omega_k$  se trouvent dans le noyau de  $\phi$ , ils deviennent donc égaux dans  $\pi_1 A *_{\pi_1 C} \pi_1 B$ . Pour voir les  $\omega_k$  comme éléments du produit libre  $\pi_1 A * \pi_1 B$  on doit faire des choix. Ce sont comme on vient de le voir des concaténations de lacets dans  $A$  ou  $B$ , et pour les lacets qui se trouvent dans  $C$ , à la fois dans  $A$  et dans  $B$ , on suit la convention de choisir l'ouvert  $A$  ou  $B$  qui contient l'image du rectangle se trouvant soit à droite, soit en dessous du segment horizontal ou vertical concerné. Autrement dit, pour le lacet  $\omega_k$ , la portion de chemin faisant l'angle autour du rectangle  $k$  comme sur l'illustration ci-dessus détermine un lacet qui se trouve dans  $B$  si l'homotopie  $H$  envoie le rectangle dans  $B$ .

L'homotopie  $H$  restreinte au rectangle numéro  $k+1$  nous donne une déformation continue entre  $\omega_k$  et  $\omega_{k+1}$ , les autres lacets correspondants aux bords des autres rectangles restent inchangés. Disons, sans restreindre la généralité, que cette homotopie se passe dans  $A$ . Si les quatre lacets correspondants aux quatre côtés sont tous dans  $A$ , alors cette homotopie a seulement changé le lacet parcouru sur  $\mathbb{J}$  (on commence par le côté du bas, puis on monte) en un lacet équivalent, parcouru sur  $\Gamma$  dans  $A$  (on monte d'abord, puis on continue horizontalement sur le côté du haut). Les concaténations correspondants à ces deux chemins sont alors *égaux* dans le produit libre  $\pi_1 A * \pi_1 B$ , on a changé la classe d'homotopie d'un lacet par celle d'un lacet homotope.

Si par contre l'un de ces lacets, correspondant à l'un des côtés du rectangle, se trouve dans  $B$ , alors nécessairement il se trouve dans l'intersection  $C$ , puisque l'homotopie restreinte au rectangle  $k + 1$  se trouve entièrement dans  $A$ . Appelons  $\theta$  ce lacet. Il est d'une part considéré comme un lacet dans  $B$  dans le rectangle adjacent, et ensuite dans  $A$ , dans le rectangle que nous étudions. Le passage par le rectangle  $k + 1$  remplace alors le lacet  $\beta_*(\theta)$ , i.e. le lacet  $\theta$  vu dans  $B$ , en  $\alpha_*(\theta)$ , le même lacet mais vu dans  $A$ . Autrement dit  $\omega_k \star \bar{\omega}_{k+1}$  est dans le noyau  $N$  car  $\alpha_*(\theta)\beta(\theta)^{-1} \in N$  par définition du produit amalgamé. En effet, si on appelle  $\xi$  le lacet parcouru avant d'atteindre le coin inférieur du rectangle  $k + 1$  et  $\zeta$  celui parcouru après avoir atteint coin supérieur droit, alors  $\omega_k = \xi \star (\alpha \circ \theta) \star \zeta$  et  $\omega_{k+1} = \xi \star (\beta \circ \theta) \star \zeta$ , si bien que

$$\omega_k \star \bar{\omega}_{k+1} = \xi \star (\alpha \circ \theta) \star \zeta \star \bar{\zeta} \star \overline{(\beta \circ \theta)} \star \bar{\xi} \simeq \xi \star (\alpha \circ \theta) \star \overline{(\beta \circ \theta)} \star \bar{\xi}$$

dont la classe d'homotopie est un conjugué de  $\alpha_*(\theta)\beta(\theta)^{-1}$ , donc dans  $N$  aussi. Ceci montre que chaque modification entre deux  $\omega_k$  consécutifs ne fait intervenir que des relateurs de  $N$  et des équivalences de lacets dans  $A$  ou dans  $B$ .

On conclut enfin par induction que  $\gamma = \gamma_1 \star \dots \star \gamma_\ell$  diffère du lacet constant d'un élément de  $N$ .  $\square$

EXEMPLE 1.3. On recouvre  $S^2$  par les deux ouverts  $A = S^2 \setminus N$  et  $B = S^2 \setminus S$  où  $N$  et  $S$  sont les pôles nord et sud. Alors  $A \approx \mathring{D}^2 \simeq \star$  et de même  $B \simeq \star$ . En effet un disque ouvert se déforme continûment sur son centre, i.e.  $H(\mathbf{x}, t) = t\mathbf{x}$  décrit une homotopie entre l'application constante en  $(0; 0)$  et l'identité. De plus  $A \cap B = S^2 \setminus \{N, S\}$  est homéomorphe à un cylindre ouvert, qui a le type d'homotopie d'un cercle. La contraction sur l'équateur donne l'équivalence.

Ainsi le Théorème de Seifert-van Kampen identifie  $\pi_1 S^2$  avec le pushout du diagramme  $1 \leftarrow \mathbb{Z} \rightarrow 1$ . Ce groupe est un quotient de  $1 * 1 \cong 1$ , c'est donc le groupe trivial.

EXEMPLE 1.4. On regarde  $\mathbb{R}P^2$  comme un quotient de  $D^2$ , les identifications antipodales n'ayant lieu que sur le bord. On recouvre le plan projectif par deux ouverts :  $A$  est l'intérieur du disque, homotope à un point,  $B$  est le quotient de  $D^2$  privé de son centre, qui a le type d'homotopie de  $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ . L'intersection  $A \cap B$  est un disque ouvert privé du centre, c'est aussi un espace qui a le type d'homotopie d'un

cercle. Pour calculer le groupe fondamental nous devons identifier l'homomorphisme  $\mathbb{Z} \cong \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1 B \cong \mathbb{Z}$ . Cet homomorphisme est induit par l'application

$$S^1 \hookrightarrow \mathring{D}^2 \setminus (0; 0) \hookrightarrow D^2 \setminus (0; 0) \xrightarrow{q} [D^2 \setminus (0; 0)]/\sim \xrightarrow{\cong} S^1/\sim$$

La première inclusion inclut le cercle comme cercle de rayon  $1/2$  dans le disque et la dernière homotopie envoie un point du disque  $\mathbf{x}$  sur le bord  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ , si bien que le cercle intérieur du disque est dilaté d'un facteur 2 avant de procéder aux identifications antipodales. Cette application est de degré 2. Autrement dit le Théorème de Seifert-van Kampen identifie  $\pi_1 \mathbb{R}P^2$  avec le pushout du diagramme  $1 \leftarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ . On obtient  $\pi_1 \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{Z}/2$ .

## 2. Espaces bien pointés

Pour pouvoir appliquer le Théorème de Seifert-van Kampen pour les espaces construits dans le chapitre précédent nous devons trouver des conditions qui permettent de se ramener à un recouvrement par deux ouverts. Cela nous amène à regarder les voisinages des points de base dans le cas d'un wedge et à construire des colliers aux endroits où on colle des cellules.

**DÉFINITION 2.1.** Un espace pointé  $(X, x_0)$  est *bien pointé* si  $x_0$  admet un voisinage  $V$  qui est contractile au sens pointé.

Autrement dit on demande une homotopie  $H: V \times I$  de l'identité vers la constante  $c_{x_0}$  avec  $H(x_0, t) = x_0$  pour tout  $t$ . On peut déformer continument  $V$  en  $x_0$  sans que ce point ne bouge au cours du temps.

**REMARQUE 2.2.** Attention. Nous utilisons ici une notion différente de ce qui est usuellement fait. Un espace bien pointé (well pointed) est défini généralement comme ayant la propriété d'extension des homotopies : Si  $F: x_0 \times I \rightarrow Y$  est une homotopie (un chemin, mais qu'on voit comme une homotopie entre ces deux extrémités) et  $h: X \rightarrow Y$  une application, alors on peut étendre l'homotopie  $F$  en une homotopie  $H: X \times I \rightarrow Y$ . La propriété d'extension se réfère au fait que  $H(x_0, t) = F(x_0, t)$  pour tout  $t$ .

Pour nous la propriété d'avoir un "bon voisinage" du point de base suffira.

EXEMPLE 2.3. Toute surface est bien pointée puisque tout point admet un voisinage homéomorphe à un disque ouvert, qu'on peut contracter en son milieu. De fait toute variété de dimension  $n$  arbitraire est bien pointée pour tout choix de point de base.

EXEMPLE 2.4. Le peigne du topologue  $0 \times I \cup I \times 0 \cup \{1/n \mid n \geq 1\} \times I$  avec sa topologie de sous-espace de  $\mathbb{R}^2$  n'est pas bien pointé en  $(0; 1)$ . Voir exercices.

LEMME 2.5. *Soient  $(X, x_0)$  et  $(Y, y_0)$  deux espaces bien pointés. Alors  $X \vee Y$  est aussi bien pointé.*

DÉMONSTRATION. On choisit des voisinages  $x_0 \in U \subset X$  et  $y_0 \in V \subset Y$  admettant des homotopies pointées  $F: U \times I \rightarrow U$  et  $G: V \times I \rightarrow V$  qui contractent  $U$  en  $x_0$  et  $V$  en  $y_0$ . Alors  $U \vee V$  est un voisinage ouvert du point de base de  $X \vee Y$  puisque sa préimage par l'application quotient  $q: X \amalg Y \rightarrow X \vee Y$  est ouverte, c'est  $U \amalg V$ . Une autre manière de dire cela est que  $U \vee V$  est ouvert car c'est l'image par  $q$  de l'ouvert saturé  $U \amalg V$ .

De plus on construit une homotopie pointée  $H: (U \vee V) \times I \rightarrow U \vee V$  en définissant en tout temps  $t$  que  $H(-, t): U \vee V \rightarrow U \vee V$  est donnée par la propriété universelle du wedge pour les applications  $F(t)$  et  $G(t)$ . Ainsi  $H(-, 0)$  est l'identité,  $H(-, 1)$  est l'application constante sur le point de base.  $\square$

### 3. Groupe fondamental d'un wedge

Nous traitons d'abord le cas du wedge de deux espaces pointés. Nous allons voir en particulier que  $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F(2)$ , le groupe libre à deux générateurs. Puis par récurrence nous étudierons le cas d'un nombre arbitraire, mais fini, d'espaces. Un argument de passage à la limite permettra enfin de comprendre le cas d'un wedge infini, nous y reviendrons dans les séries d'exercices.

Lorsqu'on construit le wedge  $A \vee B$  on aimerait pouvoir calculer le groupe fondamental grâce au Théorème de Seifert-van Kampen. La première idée qui nous vient à l'esprit est de recouvrir le wedge avec les deux sous-espaces  $A$  et  $B$ . Or ces deux sous-espaces ne sont pas ouverts en général! En effet la préimage de  $A$  par l'application quotient  $q: A \amalg B \rightarrow A \vee B$  est  $A \amalg b_0$ . C'est ici que la notion d'espace bien

pointé devient utile. Nous établissons dans le lemme suivant un résultat – pour des espaces bien pointés – qui affirme que le groupe fondamental transforme un coproduit d’espaces pointés en un coproduit de groupes.

**PROPOSITION 3.1.** *Soient  $(A, a_0)$  et  $(B, b_0)$  deux espaces bien pointés. Alors on a  $\pi_1(A \vee B) \cong \pi_1 A * \pi_1 B$ .*

**DÉMONSTRATION.** On choisit un voisinage ouvert  $U$  de  $a_0$  dans  $A$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $b_0$  dans  $B$  avec des contractions pointées  $F$  et  $G$  sur leur point de base respectif. On pose  $A' = A \vee V \subset A \vee B$  et  $B' = U \vee B \subset A \vee B$  et on remarque que  $A', B'$  fournissent un recouvrement ouvert du wedge puisque la préimage par l’application quotient  $q$  de  $A'$  par exemple est  $A \amalg V$  qui est un ouvert de la réunion disjointe. Avant d’appliquer le Théorème de Seifert-van Kampen qui s’applique donc bien, il faut identifier le type d’homotopie des ouverts  $A', B'$  et  $C' = A' \cap B'$ .

On affirme que  $A' \simeq A$ ,  $B' \simeq B$  et  $C' \simeq *$ . On traite seulement le cas de  $A'$  et on observe que  $C' = U \vee V$  est contractile par le Lemme 2.5. On a une inclusion  $i: A \subset A'$  et son inverse homotopique sera  $r: A' \rightarrow A$  défini par la propriété universelle du wedge en posant  $r(a) = a$  pour  $a \in A$  et  $r(v) = a_0$  pour  $v \in V$ . Ces choix définissent bien  $r$  puisqu’ils sont compatibles sur les points de base :  $r(b_0) = a_0 = r(a_0)$ .

On a alors  $r \circ i = id_A$  et il reste à montrer que  $i \circ r$  est homotope à l’identité. C’est ici que l’homotopie  $G$  entre en jeu. On définit  $H: A' \times I \rightarrow A'$  par les formules suivantes, pour tout  $t \in I$  :

$$H(x, t) = \begin{cases} a & \text{si } x = a \in A \\ G(v, t) & \text{si } x = v \in V \end{cases}$$

Ceci définit une application puisque  $H(a_0, t) = a_0 \sim b_0 = G(b_0, t)$  et on vérifie que  $H(x, 0) = x$  pour tout  $x$ , alors que  $H(x, 1) = (i \circ r)(x)$ , l’application qui écrase le voisinage  $V$  sur le point de base.

Par invariance homotopique on a par conséquent  $\pi_1 A' \cong \pi_1 A$ ,  $\pi_1 B' \cong \pi_1 B$  et  $\pi_1 C' = 1$ . Le groupe fondamental du wedge  $A \vee B$  est donc le pushout du diagramme  $\pi_1 A \leftarrow 1 \rightarrow \pi_1 B$ . On reconnaît le produit libre  $\pi_1 A * \pi_1 B$ .  $\square$

EXEMPLE 3.2. Le cercle étant bien pointé on calcule  $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F(2)$ , le groupe libre à deux générateurs. Le corollaire suivant permet en fait d'identifier le groupe fondamental d'un wedge fini de copies de cercles.

COROLLAIRE 3.3. *Soient  $n$  un entier naturel et  $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$  des espaces bien pointés. Alors  $\pi_1(A_1 \vee \dots \vee A_n) \cong \pi_1 A_1 * \dots * \pi_1 A_n$ .*

DÉMONSTRATION. On procède par récurrence sur  $n$ . La récurrence est initialisée puisque le cas  $n = 1$  est trivial et la Proposition 3.1 fournit le pas de récurrence.  $\square$

REMARQUE 3.4. Ce résultat est encore vrai pour un wedge infini. Dans le cas dénombrable on peut utiliser un argument de colimite pour les sous-espaces  $\bigvee_{i=1}^n A_i \subset \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$  qui donnent une filtration du wedge par des sous-espaces dont les groupes fondamentaux sont des produits libres  $\pi_1 A_1 * \dots * \pi_1 A_n$  par le Corollaire 3.3. Pour un wedge non dénombrable il faudrait étudier le cas analogue, mais transfini...

#### 4. Groupe fondamental et attachement de cellule

Avant de calculer le groupe fondamental d'un espace obtenu par attachement d'une cellule, nous parlons rapidement de rétracte. Le type de rétracte qui va apparaître dans notre argument sera le plus fort, les autres ont peut-être été vus dans le cours du semestre précédent.

DÉFINITION 4.1. Un sous-espace  $i: A \subset X$  est un *rétracte* de  $X$  s'il existe une application  $r: X \rightarrow A$  tel que  $r \circ i = id_A$ .

Ainsi le cercle unité est un rétracte de la figure huit  $S^1 \vee S^1$ , mais ils n'ont pas le même type d'homotopie, ayant des groupes fondamentaux différents. L'espace  $\star$  est un rétracte de tout espace  $X$  pour tout choix de point  $x \in X$  correspondant à l'image de l'application  $\star \rightarrow X$ .

REMARQUE 4.2. Cette notion est trop faible pour conclure quoi que ce soit de positif sur le type d'homotopie, mais elle suffit déjà à pouvoir exclure l'existence de certaines applications, typiquement celle d'une application du disque sur le cercle qui fixe le bord. En effet, une telle application serait une rétraction de l'inclusion  $S^1 \subset D^2$  et elle induirait des homomorphismes au niveau des groupes fondamentaux  $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$  dont la composition serait  $(id_{S^1})_*$ , c'est-à-dire l'identité, une absurdité.

DÉFINITION 4.3. Un sous-espace  $i: A \subset X$  est un *rétracte de déformation* de  $X$  s'il existe une application  $r: X \rightarrow A$  tel que  $r \circ i = id_A$  et  $i \circ r \simeq id_X$ .

EXEMPLE 4.4. Le point  $(0; 1)$  est rétracte de déformation du peigne du topologue, car c'est un espace contractile. De manière informelle, on peut expliquer cela en trois temps : on contracte d'abord toutes les dents du peigne sur la base horizontale du peigne, puis on contracte cette base sur  $(0; 0)$ , et enfin on revient sur  $(0; 1)$ . Cette homotopie ne fixe pas ce point et nous avons vu qu'il est impossible d'obtenir une telle homotopie, ce qui empêche ce rétracte d'être un rétracte de déformation fort dans le sens suivant.

DÉFINITION 4.5. Un sous-espace  $i: A \subset X$  est un *rétracte de déformation fort* de  $X$  s'il existe une application  $r: X \rightarrow A$  tel que  $r \circ i = id_A$  et  $i \circ r$  est homotope à  $id_X$  par une homotopie fixant  $A$ .

Autrement dit on suppose que l'homotopie  $H$  vérifie  $H(a, t) = a$  pour tout  $a \in A$  et tout  $0 \leq t \leq 1$ . Par exemple le cercle est un rétracte de déformation fort du cylindre  $S^1 \times I$ , mais concentrons-nous sur les exemples qui vont être utile par la suite. Considérons le collier  $Col(A) = A \times [0, 3/4[$ , un cylindre sur  $A$  ouvert d'un côté et fermé de l'autre qui a le type d'homotopie de  $A$ .

LEMME 4.6. *Tout espace  $A$  est un rétracte de déformation fort de son collier  $Col(A)$ .*

DÉMONSTRATION. L'inclusion  $i: A \hookrightarrow Col(A)$  envoie un point  $a$  sur le point  $(a, 0)$  de la base du collier et la rétraction  $r$  envoie  $(a, t)$  sur  $a$ . Ainsi  $r \circ i = id_A$ . La composition  $i \circ r$  envoie  $(a, t)$  sur  $(a, 0)$  pour tout  $0 \leq t \leq 3/4$ . On construit une homotopie  $H: Col(A) \times I \rightarrow Col(A)$  en posant  $H(a, t, s) = (a, ts)$ . Quand  $s = 0$  on a bien  $H(-, 0) = i \circ r$  et  $H(-, 1) = id_{Col(A)}$ . De plus  $H(a, 0, s) = (a, 0)$  pour tout  $s$ , la base du collier ne bouge pas pendant l'homotopie.  $\square$

Soit  $CA = A \times I/A \times 1$  le cône de base  $A \approx A \times 0$ . On va aussi utiliser  $C'A = A \times ]1/4, 1]/A \times 1$  un cône ouvert, sous-espace de  $CA$ . Les deux espaces sont contractiles (une homotopie les contracte sur le sommet du cône).

PROPOSITION 4.7. *Soient  $(X, x_0)$  et  $(A, a_0)$  deux espaces pointés avec  $A$  connexe par arcs. Soit  $f: A \rightarrow X$  une application pointée et  $Y = X \cup_f CA$  l'espace pointé obtenu de  $X$  en attachant une  $A$ -cellule le long de  $f$ . Alors  $\pi_1 Y \cong \pi_1 X *_{\pi_1 A} 1$ .*

DÉMONSTRATION. Exactement comme dans le cas d'un wedge nous devons modifier le recouvrement de  $Y$  donné par les images de  $CA$  et  $X$  dans l'espace quotient  $Y = X \amalg CA / (a, 0) \sim f(a)$  car ces sous-espaces ne sont pas ouverts en général. Nous allons bien sûr choisir d'une part  $C'A$ , un cône ouvert dans  $CA$  dont les points ne sont pas affectés par les identifications du quotient, si bien qu'il est saturé et  $q(C'A)$  est un ouvert de  $Y$  homéomorphe à  $C'A$ , donc contractile.

D'autre part nous posons  $X' = q(X \amalg Col(A))$ . Comme  $X \amalg Col(A)$  est aussi saturé (du fait que le collier contient toute la base  $A \times 0$ ),  $X'$  est un ouvert et il est clair que  $X'$  et  $q(C'A)$  recouvrent  $Y$ . Nous affirmons d'abord que  $X'$  a le même type d'homotopie que  $X$ . Rappelons que nous avons vu que  $X$  s'identifie à un sous-espace de  $Y$  et appelons  $i: X \hookrightarrow X'$  l'inclusion évidente. Montrons que ce sous-espace est un rétracte de déformation fort. La rétraction est donnée par l'identité sur  $X$  et  $f \circ r$  sur le collier, où  $r$  est la rétraction du Lemme 4.6. Ces choix sont compatibles avec la relation d'équivalence puisque  $(f \circ r)(a, t) = f(a) \sim a$ . Ils induisent donc par la propriété universelle du quotient une application  $R: X' \rightarrow X$ .

On a bien  $R \circ i = id_X$ , reste à construire une homotopie contractante. Pour construire  $G: X' \times I \rightarrow X'$  on observe d'abord que  $X' \times I = q(X \amalg Col(A)) \times I \approx [(X \times I) \amalg (Col(A) \times I)] / \mathcal{R}$  où la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  identifie  $(f(a), s)$  avec  $(a, 0, s)$  pour tout  $a \in A$  et tout  $s \in I$ . On va donc définir  $G$  séparément sur  $X \times I$  et sur  $Col(A) \times I$ . On pose  $G(x, s) = i(x)$  pour tout  $s \in I$ , si bien que  $X$  - ou plutôt  $i(X)$  - est un sous-espace de  $X'$  qui reste constamment fixe pendant toute la durée de l'homotopie  $G$ . On pose encore  $G(a, t, s) = (q \circ H)(a, t, s) = q(a, ts)$  où  $H$  est l'homotopie contractante du Lemme 4.6. L'application ainsi définie sur la réunion disjointe  $(X \times I) \amalg (Col(A) \times I)$  passe au quotient par la relation  $\mathcal{R}$  puisque  $G(f(a), s) = i(f(a))$  et  $G(a, 0, s) = q(a, 0)$  définissent le même point de  $X'$ . L'homotopie ainsi obtenue déforme continument  $i \circ R$  en l'identité.

Il reste encore à identifier le type d'homotopie de l'intersection  $X' \cap q(C'A) = q(A \times ]1/4, 3/4[$ . Cet ouvert est saturé et  $q$  identifie homéomorphiquement le cylindre ouvert de base  $A$  avec cette intersection. Ainsi  $X' \cap q(C'A) \simeq A$ .

Comme  $A$  est connexe par arcs, les hypothèses du Théorème de Seifert-van Kampen sont vérifiées et on conclut que le groupe fondamental de  $Y$ , pour le point de base  $y_0 = q(x_0) = q((a_0, 0))$ , est isomorphe à  $\pi_1 Y \cong \pi_1 X *_{\pi_1 A} \pi_1(CA)$ . On conclut par le fait que  $CA$  est contractile.  $\square$

### 5. Groupe fondamental et attachement d'une cellule standard

Regardons ce qui se passe dans le cas particulier d'un attachement d'une cellule  $e^n \approx D^n \approx CS^{n-1}$ . On choisit  $(1; 0; \dots; 0)$  comme point de base de la sphère unité. Lorsqu'on attache une cellule de dimension (assez) grande on ne modifie pas le groupe fondamental :

**COROLLAIRE 5.1.** *Soient  $(X, x_0)$  un espace pointé et  $f: S^{n-1} \rightarrow X$  une application pointée avec  $n \geq 3$ . Soit  $Y = X \cup_f e^n$  l'espace pointé obtenu de  $X$  en attachant une  $n$ -cellule le long de  $f$ . Alors  $\pi_1 Y \cong \pi_1 X$ .*

**DÉMONSTRATION.** La sphère  $S^{n-1}$  est connexe par arcs si bien que la Proposition 4.7 s'applique. Comme  $\pi_1 S^{n-1}$  est trivial pour  $n \geq 3$  (voir exercices), la conclusion suit.  $\square$

**EXEMPLE 5.2.** Nous avons calculé le groupe fondamental  $\pi_1 \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{Z}/2$ . Comme l'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^3$  admet une décomposition cellulaire de la forme  $\mathbb{R}P^2 \cup e^3$ , on conclut que  $\pi_1 \mathbb{R}P^3 \cong \mathbb{Z}/2$ .

Une application pointée  $f: S^1 \rightarrow X$  représente un lacet dans  $X$ , basé en  $x_0$ . Sa classe d'homotopie est un élément  $[f]$  de  $\pi_1 X$  et on notera  $N_f$  le sous-groupe normal engendré par  $[f]$ . De manière équivalente on peut dire que  $f$  induit une application  $f_*: \pi_1 S^1 \rightarrow \pi_1 X$ , i.e un homomorphisme  $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1 X$ . L'image de 1 est précisément  $[f] = f_*(1)$  puisque le générateur de  $\pi_1 S^1$  est représenté par l'identité (ou toute autre application de degré un). Ainsi  $N_f$  est le plus petit sous-groupe normal de  $\pi_1 X$  qui contient l'image de  $f_*$ .

**COROLLAIRE 5.3.** *Soient  $(X, x_0)$  un espace pointé et  $f: S^1 \rightarrow X$  une application pointée. Soit  $Y = X \cup_f e^2$  l'espace pointé obtenu de  $X$  en attachant une 2-cellule le long de  $f$ . Alors  $\pi_1 Y \cong \pi_1 X / N_f$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme ci-dessus les conditions d'application de la Proposition 4.7 sont remplies. Ici  $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$  et la conclusion suit du fait que l'amalgame  $\pi_1 X *_{\pi_1 S^1} 1$  est isomorphe au quotient de  $\pi_1 X$  par le sous-groupe normal engendré par l'image de  $f_*: \pi_1 S^1 \rightarrow \pi_1 X$ .  $\square$

**EXEMPLE 5.4.** Soit  $K$  la bouteille de Klein, vue sous sa forme de quotient du carré  $I \times I$  par identification des bords verticaux  $a_1$  et  $a_2$  orientés tous deux de bas en haut et des bords horizontaux  $b_1$  et  $b_2$  avec des orientations opposées. Ainsi  $K$  est obtenu du wedge de deux cercles  $S^1 \vee S^1$  par attachement d'une cellule de dimension 2. Il reste à identifier l'application d'attachement  $f: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ . Appelons  $a$  et  $b$  les lacets du wedge, images par passage au quotient des chemins  $a_1$  et  $b_1$ . La concaténation des chemins  $b_1 * a_1 * b_2 * \bar{a}_2$  forme un lacet basé en  $(0; 0)$  dont l'image dans le wedge est  $b * a * b * \bar{a}$ . Sa classe d'homotopie est  $\beta\alpha\beta\alpha^{-1}$  dans le groupe libre  $F(\alpha, \beta) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1)$ . Ainsi  $\pi_1 K \cong \langle \alpha, \beta \mid \beta\alpha\beta\alpha^{-1} \rangle$  le groupe de Klein.

Pour terminer nous aimerions encore étudier le cas d'un attachement d'une cellule de dimension un. Cette situation correspond à un diagramme  $D^1 \leftarrow S^0 \xrightarrow{f} X$  et on attache une "anse" entre  $x_0 = f(1)$  et un point  $f(-1) = x$ . Nous considérons le cas où  $x$  et  $x_0$  appartiennent à la même composante connexe par arcs.

**COROLLAIRE 5.5.** *Soient  $(X, x_0)$  un espace bien pointé et connexe par arcs et  $f: S^0 \rightarrow X$  une application pointée. Soit  $Y = X \cup_f e^1$  l'espace pointé obtenu de  $X$  en attachant une 1-cellule le long de  $f$ . Alors  $\pi_1 Y \cong \pi_1 X * \mathbb{Z}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Comme  $S^0$  n'est pas connexe par arcs, il faut passer par un autre raisonnement que dans les corollaires précédents. Comme  $X$  est connexe par arcs, l'application  $f$  est homotope à l'application constante (il existe un chemin dans  $X$  entre  $x_0$  et  $x$ ). Par conséquent  $Y$  est homotope à l'espace obtenu comme recollement de  $X \amalg D^1/x_0 \sim \pm 1$ .

Or cet espace est un wedge  $X \vee S^1$  car on peut identifier le quotient en deux temps : d'abord  $X \amalg I/1 \sim -1 \approx S \amalg S^1$ , puis on identifie le point de base de  $S^1$

avec celui de  $X$ . Le cercle étant bien pointé et  $X$  l'étant également par hypothèse on conclut par la Proposition 3.1.  $\square$

EXEMPLE 5.6. Soit  $f: S^0 \rightarrow S^1$  l'inclusion de la 0-sphère dans la 1-sphère. L'espace  $S^1 \cup_f e^1$  est homéomorphe à la lettre grecque  $\Theta$ . Son groupe fondamental est  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

## 6. La classification des surfaces

Notre but dans les dernières sections de cette partie n'est pas de démontrer la classification des surfaces (compactes sans bord), mais d'illustrer comment le Théorème de Seifert-van Kampen permet de calculer les groupes fondamentaux de toutes ces surfaces et comment cela permet de les distinguer : deux surfaces ayant des groupes fondamentaux non isomorphes ne sont pas homotopes, encore moins homéomorphes, mais réciproquement deux surfaces non homéomorphes ont des groupes fondamentaux distincts. De fait, on peut même extraire du groupe fondamental des invariants plus grossiers qui font encore l'affaire, ce sera le sujet de la dernière section.

Les livres de Massey et de Lee sont de bonnes références pour une preuve de la classification. Souvent les auteurs évitent de démontrer que toute surface admet une triangulation et donc une *présentation polygonale*, c'est-à-dire une manière de se représenter une surface donnée comme quotient d'un polygone à  $2k$  côtés, les identifications ne concernant que les côtés qui sont identifiés deux à deux. On étiquette les  $2k$  côtés avec les lettres  $a_1, \dots, a_k$  ou leur inverse selon l'identification qui est faite. Ainsi si le premier côté est  $a_1$ , parcouru dans le sens trigonométrique, on trouvera plus loin sur le bord une étiquette  $a_1$  sur le  $i$ -ème côté si ce côté est identifié avec  $a_1$  dans le même sens, ou  $a_1^{-1}$  s'il est identifié avec  $a_1$  dans le sens contraire.

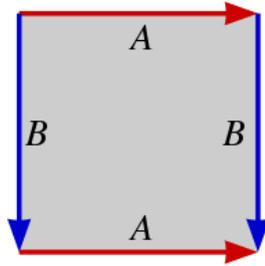
Pour établir la classification une fois ceci supposé la partie technique de la preuve ramène l'étude des surfaces à des présentations polygonales particulières. Celles-ci ne font intervenir que des identifications qui correspondent à des étiquetages  $a_i a_i$  si les deux côtés consécutifs en question sont identifiés dans le même sens (comme pour le plan projectif) et  $[a_i, a_{i+1}] = a_i a_{i+1} a_i^{-1} a_{i+1}^{-1}$  si les quatre côtés consécutifs en question sont identifiés deux à deux en alternance (le premier avec le troisième et le deuxième avec le quatrième) et en inversant le sens (comme pour le tore).

**THÉORÈME 6.1.** *Soit  $S$  une surface. Il existe alors une présentation polygonale de  $S$  comme quotient d'un polygone ayant  $2k$  côtés. De plus les côtés sont identifiés deux à deux et, si  $S \not\cong S^2$ , ne font intervenir que des identifications de type  $a_i a_i$  et  $[a_i, a_{i+1}]$ . De plus on peut supposer que tous les  $a_i a_i$  sont consécutifs et enfin les  $2k$  sommets sont identifiés à un seul point.*

Nous ne donnons pas la preuve de ce résultat, ce sera notre “boîte noire”, mais retenons qu'on peut associer à toute surface  $S$  un nombre  $k$  et un mot  $W$  du groupe libre  $F(a_1, \dots, a_k)$  de  $2k$  lettres particulier. Il fait apparaître chaque générateur deux fois, soit sous la forme d'un carré  $a_i^2$ , soit sous la forme d'un commutateur  $[a_i, a_{i+1}]$ . Seule la sphère fait exception :

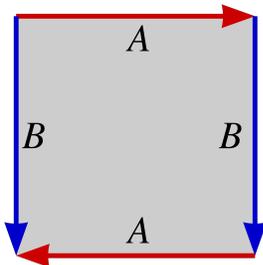
**EXEMPLE 6.2.** La sphère  $S^2$  est présentée usuellement par le quotient du disque par son bord. Pour que la sphère fasse partie des exemples couverts par le théorème on pourrait utiliser le 2-gone et le mot  $aa^{-1}$ , mais dans ce cas les deux sommets ne sont pas identifiés dans le quotient !

**EXEMPLE 6.3.** La construction des surfaces que nous avons déjà rencontrées précédemment dans le cours faisait précisément appel à une présentation polygonale telle qu'elle est décrite dans le théorème ci-dessus. Le tore par exemple est le quotient d'un carré (un 4-gone) dont les côtés sont étiquetés de sorte à former un commutateur  $[a_1, a_2]$ , comme ceci :



Pour que cet exemple soit totalement en phase avec la théorie il aurait fallu appeler  $a_1$  les côtés  $A$  et  $a_2$  les côtés  $B$  dont on doit changer le sens pour obtenir le commutateur donné. Je laisse cette illustration d'abord par flemmardise et aussi pour mettre en lumière l'arbitraire dans les choix effectués. Il n'est pas nécessaire de parcourir le bord dans le sens trigonométrique pour attacher une cellule, on peut commencer

en n'importe quel sommet du polygone et obtenir un autre mot qui donne une présentation d'un groupe isométrique, on peut renommer les côtés et changer leur sens... Le plan projectif correspond au mot  $a^2$ , c'est le quotient d'un 2-gone qu'on visualise comme un disque  $D^2$  dont les sommets sont  $\pm 1$  et les côtés sont les deux hémicycles. Enfin la bouteille de Klein



correspond au mot  $abab^{-1}$  par exemple, mais on verra en exercice qu'il existe une autre présentation  $a_1^2 a_2^2$ .

**PROPOSITION 6.4.** *Soit  $P$  un polygone à  $2k$  côtés,  $W$  un mot de  $F(a_1, \dots, a_k)$  comme ci-dessus et  $X$  le quotient de  $P$  par la relation d'équivalence décrite par ce mot. Alors  $\pi_1 X \cong \langle a_1, \dots, a_k \mid W \rangle$ .*

**DÉMONSTRATION.** L'espace  $X$  a une structure cellulaire transparente. Il est formé d'un unique point, qu'on choisit comme point de base et qui correspond à la classe de chaque sommet du polygone  $P$ . On attache à ce point  $k$  segments qui correspondent chacun à une paire de côtés de  $P$ . On a ainsi obtenu un wedge de  $k$  cercles qu'on étiquette  $a_1, \dots, a_k$ , comme les côtés du polygone auxquels ils correspondent. Ce wedge n'est rien d'autre que le quotient du bord de  $P$  par la relation d'équivalence restreinte au bord.

On ajoute enfin une unique 2-cellule  $e^2$ , homéomorphe à  $\mathring{P}$ , l'intérieur de  $P$  n'étant pas touché par les identifications dans le quotient. Explicitement l'application quotient  $q: P \rightarrow X$  se restreint en un homéomorphisme  $\mathring{P} \rightarrow \mathring{e}^2$ .

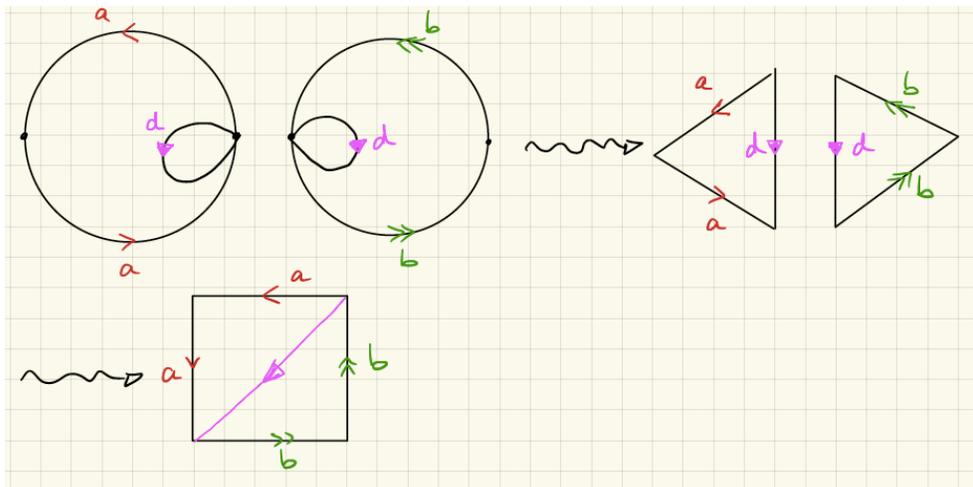
Le Théorème de Seifert-van Kampen s'applique à cet espace (plus précisément c'est le Corollaire 5.3 qui permet de conclure). On obtient alors  $\pi_1 X \cong \pi_1(\vee S^1)/N_f$  où  $f$  est l'application d'attachement de la 2-cellule sur le wedge de cercles. Or, l'application d'attachement de  $\mathring{P}$  au polygone  $P$  est donnée par un homéomorphisme  $S^1 \rightarrow \partial P$ , disons qu'on parcourt le bord de  $P$  dans le sens trigonométrique en

commençant par le côté étiqueté  $a_1$ . Par conséquent l'application d'attachement de la cellule  $e^2$  est obtenue en passant au quotient  $f: S^1 \approx \partial P \xrightarrow{q} \vee S^1$ . La classe d'homotopie de cette application détermine un élément de  $\pi_1(\vee S^1) \cong F(a_1, \dots, a_k)$  qui est exactement donné par  $W$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

On retiendra de cette proposition qu'une présentation polygonale est exactement équivalente au calcul du groupe fondamental! Le même mot qui décrit les identifications topologiques de l'espace quotient donne également l'amalgame de groupes.

EXEMPLE 6.5. Considérons la somme connexe de trois copies du plan projectif. Comme le plan projectif admet une présentation polygonale correspondant au mot  $a^2$  (on identifie les deux demi-cercles bordant un disque), on obtient par la même technique que pour le tore à deux trous la présentation polygonale  $a^2b^2c^2$  pour  $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ , comme quotient d'un hexagone.

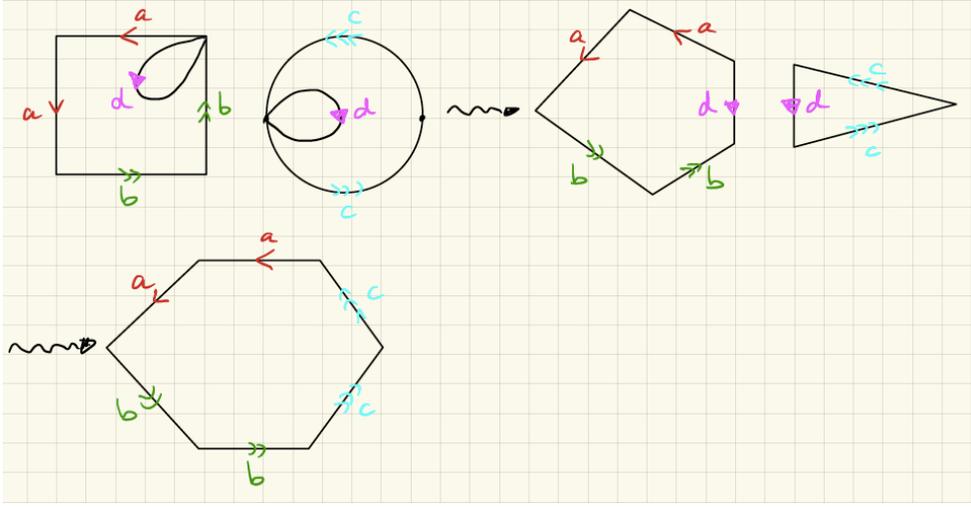
Voici quelques détails. On commence avec  $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ , qu'on construit en enlevant un voisinage de bord  $d$  dans chacun des plans projectifs en faisant de sorte que le bord passe par le point de base, représenté par  $+1$  dans le premier disque et  $-1$  dans le second.



On dédouble ce point de base pour transformer le lacet  $d$  en un segment (sans oublier que ces deux points devront être identifiés dans le quotient). Ceci nous amène à la deuxième image de l'illustration ci-dessus où chaque plan projectif privé d'un petit disque est représenté comme quotient d'un triangle. On effectue les identifications en

changeant l'ordre, i.e., on recolle d'abord les segments  $d$  pour obtenir une présentation polygonale à partir d'un carré. Ainsi la somme connexe de deux plans projectifs est une surface correspondant au mot  $a^2b^2$  (c'est donc une bouteille de Klein).

On refait la même chose pour obtenir la somme connexe de trois copies du plan projectif, sans donner tous les détails :

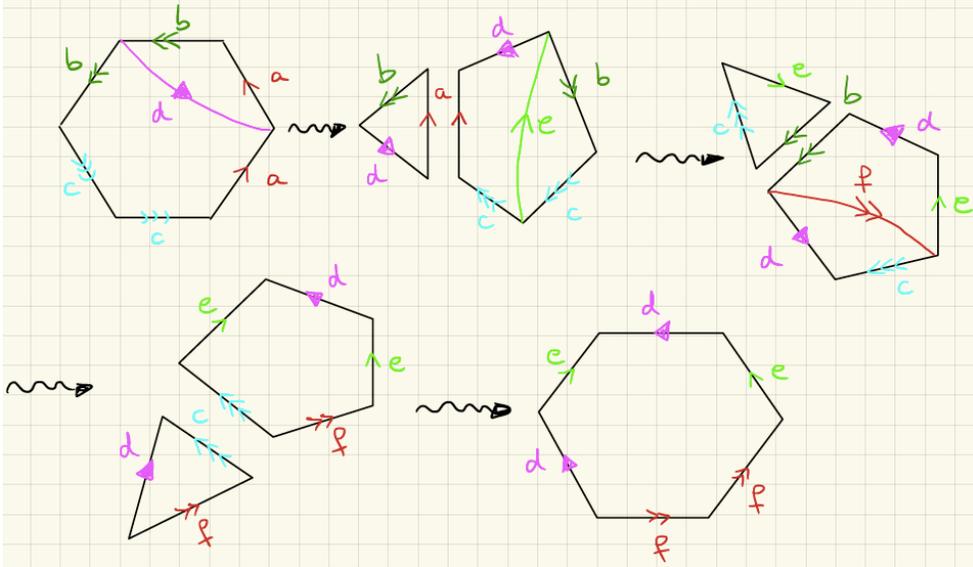


On conclut de la Proposition 6.4 que  $\pi_1(\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) \cong \langle a, b, c \mid a^2b^2c^2 \rangle$ .

Pour arriver à la classification des surfaces, nous avons encore besoin d'un lemme, qui concerne l'espace de l'exemple précédent et dont la preuve suit exactement la même stratégie.

LEMME 6.6. *On a un homéomorphisme  $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \approx \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ .*

DÉMONSTRATION. On part de la présentation polygonale de la triple somme connexe de plans projectifs, donnée par un hexagone et le mot  $a^2b^2c^2$  comme expliqué dans l'Exemple 6.5. On procède ensuite par découpage et réarrangement. On découpe l'hexagone en un triangle et un pentagone en suivant un segment  $d$  tracé de sorte à séparer les  $a$  et les  $b$ , comme indiqué sur la figure ci-dessous (on indique par un trait violet un petit triangle comment on devra identifier les deux segments ainsi obtenus) :



L'ordre des identifications n'ayant pas d'importance, on recolle d'abord les côtés  $a$ , quitte à retourner l'une des deux pièces pour que le sens soit compatible, puis on coupe le long de  $e$  de sorte à créer à nouveau un triangle et un pentagone, mais cette fois ce sont les  $c$  qui ont été séparés. On identifie maintenant les  $b$ , dans le bon sens.

Avant la dernière opération, on observe que puisque le tore ne peut pas apparaître dans la somme connexe de deux plans projectifs seulement, on doit absolument séparer les trois paires de côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour avoir une chance de réarranger correctement les pièces. C'est maintenant chose faite et on reconnaît un bout de commutateur  $ede^{-1}$ , mais il faut procéder à un dernier découpage pour placer le  $d^{-1}$  manquant au bon endroit. On découpe alors le long de  $f$  et on recolle les  $c$  qui devaient encore disparaître.

On obtient pour finir la présentation donnée par le mot  $ede^{-1}d^{-1}f^2$ . Si on coupait encore un triangle dont deux côtés seraient ceux d'étiquette  $f$ , on obtiendrait un tore troué et un plan projectif troué, si bien que cette dernière présentation correspond bien à la somme connexe  $T^2 \# \mathbb{R}P^2$ .  $\square$

REMARQUE 6.7. Si  $S$  est une surface dont la présentation polygonale est un  $2k$ -gone et les identifications correspondent au mot  $W$  et si  $T$  est une surface dont la présentation polygonale est un  $2\ell$ -gone et les identifications correspondent au mot

$W'$ , alors la somme connexe  $S\#T$  est une surface dont la présentation polygonale est un  $2(k + \ell)$ -gone et les identifications correspondent au mot  $WW'$ .

**THÉORÈME 6.8.** *Toute surface est homéomorphe soit à la sphère, soit à une somme connexe de tores, soit à une somme connexe de plans projectifs.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $S$  une surface. On peut supposer que  $S$  n'est pas homéomorphe à  $S^2$  et on utilise le Théorème 6.1 pour présenter  $S$  comme quotient d'un  $2k$ -gone. Si  $k = 2g$  est pair et que seuls des commutateurs apparaissent, alors  $S$  est un tore à  $g$  trous. Si seuls des carrés apparaissent,  $W = a_1^2 \dots a_k^2$ , alors  $S$  est une somme connexe de  $k$  plans projectifs. C'est quand des carrés et des commutateurs apparaissent simultanément qu'il faut travailler un peu.

Dans ce cas on peut choisir l'un des sommets du polygone comme point de base pour faire en sorte que le mot commence par les commutateurs et se termine par les carrés. On procède par récurrence sur le nombre de commutateurs. S'il n'y en a qu'un, on découpe un heptagone en ne gardant que les six côtés correspondant à  $[a_1, a_2]a_3^2$ . Le quotient est une somme connexe  $(T^2\#\mathbb{R}P^2) \setminus U$  à laquelle on a ôté un voisinage ouvert homéomorphe à un disque. Or, par le Lemme 6.6, cet espace est homéomorphe à  $(\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2) \setminus V$ , où  $V$  est un voisinage ouvert homéomorphe à un disque. On recolle l'heptagone correspondant pour se retrouver avec une présentation équivalente, mais de  $(\mathbb{R}P^2)^{\#k}$ . L'argument de récurrence est identique.  $\square$

**EXEMPLE 6.9.** Nous avons rencontré dans cette section la sphère, le tore, le plan projectif et des sommes connexes de ceux-ci. Et la bouteille de Klein? On se souviendra peut-être d'un exercice qui nous avait permis de l'identifier à  $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ . C'est pour cette raison que la bouteille de Klein ne fait pas partie des exemples élémentaires à partir desquels toutes les autres surfaces peuvent être construites.

## 7. Abélianisation et caractéristique d'Euler

On commence par définir l'abélianisé d'un groupe et on montre que le groupe fondamental abélianisé suffit à distinguer les surfaces les unes des autres. On introduit ensuite la caractéristique d'Euler, un simple nombre entier qui donne presque une information aussi forte.

DÉFINITION 7.1. Soit  $G$  un groupe. L'abélianisé  $G_{ab}$  est le groupe quotient de  $G$  par le sous-groupe normal  $[G, G]$  des commutateurs.

On ajoute donc à une présentation de  $G$  les relateurs  $[g, h]$  pour tous  $g, h \in G$  pour faire en sorte que dans  $G_{ab}$  on ait la relation  $gh = hg$ , i.e., ce groupe est commutatif.

On écrit parfois  $H_1G$  ou  $H_1(G; \mathbb{Z})$  pour  $G_{ab}$  à cause de l'interprétation en tant que *groupe d'homologie* de ce groupe abélien. L'homomorphisme quotient  $G \rightarrow G_{ab}$  est le meilleur homomorphisme de  $G$  vers un groupe abélien, dans le sens où tout homomorphisme  $G \rightarrow A$  vers un groupe abélien  $A$  factorise pas l'abélianisation. C'est une propriété universelle vue en exercice.

EXEMPLE 7.2. Soit  $F$  un groupe libre à  $k$  générateurs. Alors  $F_{ab}$  est un groupe abélien libre à  $k$  générateurs, isomorphe à  $\mathbb{Z}^k$ . Nous avons souvent travaillé avec la présentation  $\langle a, b \mid [a, b] \rangle$  de  $\mathbb{Z}^2$ , le raisonnement est le même pour plus de deux générateurs. En exercice on montre que l'abélianisé du groupe fondamental d'une somme connexe de  $g$  tores est un groupe abélien libre à  $2g$  générateurs.

PROPOSITION 7.3. L'abélianisé de  $\pi_1(\mathbb{R}P^2)^{\#k}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2$ .

DÉMONSTRATION. Le groupe fondamental en question est  $\pi = \langle a_1, \dots, a_k \mid a_1^2 \dots a_k^2 \rangle$ . Posons  $A = \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2$  et appelons  $e_1, \dots, e_{k-1}$  les générateurs du groupe abélien libre  $\mathbb{Z}^{k-1}$  et  $f$  celui de  $\mathbb{Z}/2$ . On construit  $\varphi: \pi \rightarrow A$  en définissant  $\varphi(a_i) = e_i$  pour  $i \neq k$  et  $\varphi(a_k) = f - e_1 - \dots - e_{k-1}$ . Ces choix définissent bien un homomorphisme de groupes puisque

$$\varphi(a_1^2 \dots a_k^2) = 2e_1 + \dots + 2e_{k-1} + 2(f - e_1 - \dots - e_{k-1}) = 2f = 0$$

De plus  $A$  étant abélien, tout commutateur de  $\pi$  est envoyé sur zéro dans  $A$ , si bien que  $\varphi$  passe au quotient et induit  $\Phi: \pi_{ab} \rightarrow A$ . Pour montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme on exhibe un inverse  $\Psi$ . On pose  $\Psi(e_i) = \bar{a}_i$  et  $\Psi(f) = \overline{a_1 \dots a_k}$ , où la barre indique les classes dans  $\pi_{ab}$ . L'image de  $f$  est bien un élément d'ordre 2 car

$$(\overline{a_1 \dots a_k})^2 = \overline{a_1 \dots a_k \cdot a_1 \dots a_k} = \overline{a_1^2 \dots a_k^2} = \bar{1}$$

puisque les éléments commutent entre eux dans le quotient. La seule vérification à faire est

$$\Psi(\Phi(\bar{a}_k)) = \Psi(f - e_1 - \dots - e_{k-1}) = \overline{a_1 \dots a_k} \cdot \bar{a}_1^{-1} \dots \bar{a}_{k-1}^{-1} = \bar{a}_k$$

L'autre calcul  $\Phi(\Psi(f)) = f$  est similaire.  $\square$

Les groupes fondamentaux de la sphère, des tores à  $g$  trous et des sommes connexes de plans projectifs sont tous distincts. Nous montrons mieux : leurs abélianisés sont des groupes abéliens non isomorphes. Ceci nous permet de conclure que la liste des surfaces faite dans le Théorème 6.8 est complète, ce que nous savions déjà, mais aussi libre de répétition.

**COROLLAIRE 7.4.** *Toute surface est homéomorphe à exactement l'une des surfaces suivantes : la sphère, une somme connexe de tores, ou une somme connexe de plans projectifs.*

**DÉMONSTRATION.** Deux surfaces homéomorphes sont homotopes. Elles ont donc des groupes fondamentaux isomorphes, et a fortiori, leurs abélianisés sont des groupes abéliens isomorphes. Or le groupe nul (pour la sphère  $S^2$ ), les groupes libres  $\mathbb{Z}^g$  (pour les tores), et les groupes  $\mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z}/2$  sont non isomorphes deux à deux.  $\square$

On termine comme promis avec un invariant encore plus grossier.

**DÉFINITION 7.5.** Soit  $X$  un espace connexe par arcs obtenu à partir d'un wedge de  $k$  cercles en attachant  $\ell$  cellules de dimension 2. Alors  $\chi(X) = 1 - k + \ell$  est la *caractéristique d'Euler* de  $X$ .

On ne montre pas ici que cet invariant ne dépend pas de la présentation cellulaire choisie (mais c'est le cas). On constate par exemple que  $\chi(S^2) = 2$ , que  $\chi(T^2) = 0$  et plus généralement  $\chi(T^2 \# \dots \# T^2) = 2 - 2g$  si  $g$  est le nombre de tores apparaissant dans la somme connexe, c'est-à-dire le nombre de trous. Enfin  $\chi(\mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2) = 2 - g$ .

Ainsi pour un nombre entier  $n$  donné, il existe au plus deux surfaces ayant ce nombre pour caractéristique d'Euler. Pour départager les deux possibilités, il n'est pas nécessaire de calculer le groupe fondamental ou son abélianisé, il suffit en fait

de savoir si la surface est *orientable* ou non, c'est-à-dire si elle contient un ruban de Möbius ou non.



## Chapitre 5

### Revêtements

Pour finir nous étudions les revêtements d'espaces topologiques. Notre but est de généraliser et développer une théorie concernant des applications quotients qui se comportent particulièrement bien par rapport au groupe fondamental, dans l'esprit de ce que l'application exponentielle nous a permis de comprendre sur le groupe fondamental du cercle.

#### 1. Définitions et exemples

Nous supposerons sauf mention du contraire que tous les espaces de ce chapitre sont connexes par arcs et *localement connexes par arcs*, i.e. tout voisinage ouvert d'un point contient un voisinage connexe par arcs.

**DÉFINITION 1.1.** Une application  $p: E \rightarrow X$  est un *revêtement* si tout point  $x \in X$  admet un voisinage ouvert  $U$  connexe par arcs, appelé *ouvert trivialisant*, tel que  $p^{-1}(U) = \cup U_i$  est une réunion disjointe non vide d'ouverts  $U_i \subset E$  avec  $p|_{U_i}: U_i \rightarrow U$  est un homéomorphisme.

**REMARQUE 1.2.** On observe que  $p$  est nécessairement surjective et on appelle  $p$  *projection*. La préimage d'un point  $p^{-1}(x)$  est la *fibres* au-dessus de  $x$ ,  $E$  est l'*espace total* et  $X$  la *base* de la projection. Enfin les  $U_i$  sont les *feuilles*. On imagine localement un revêtement comme un mille-feuille où les feuilles, tous homéomorphes, s'empilent les uns au-dessus des autres et  $p$  les envoie tous sur la base du mille-feuille.

**EXEMPLE 1.3.** L'application exponentielle  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  qui envoie  $t$  sur  $e^{it}$  est un revêtement. Les applications de degré  $n$  du cercle dans lui-même définies par la formule complexe  $e^{it} \mapsto e^{int}$  également. Les fibres sont toutes constituées de  $n$  points.

L'application quotient par l'antipodale  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  est aussi un revêtement à deux feuilles. Tout point de l'espace projectif a deux préimages dans  $S^n$  et on peut choisir un ouvert  $U$  autour de l'un d'eux, connexe par arcs et assez petit pour

qu'il soit disjoint de  $-U$ . Enfin, pour tout espace discret  $F$  on peut construire le revêtement trivial  $X \times F \rightarrow X$  donné par la projection sur la première composante. L'espace total n'est pas connexe par arcs ici.

On établit deux propriétés élémentaires à la fin de cette section. La première montre que les fibres sont discrètes.

LEMME 1.4. *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement. Chaque fibre est un espace discret (en tant que sous-espace de  $E$ ).*

DÉMONSTRATION. On choisit un ouvert trivialisant  $U \ni x$ . Pour tout feuillet  $U_i$  il existe un unique point  $x_i \in U_i$  tel que  $p(x_i) = x$ . Ainsi la fibre  $p^{-1}(x)$  est constituée des  $x_i$  qui sont ouverts dans  $p^{-1}(x)$  puisque  $U_i \cap p^{-1}(x) = \{x_i\}$ .  $\square$

On montre ensuite que les revêtements sont des cas particuliers de quotients.

PROPOSITION 1.5. *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement. Alors  $p$  est une application ouverte. En particulier c'est une application quotient.*

DÉMONSTRATION. Soit  $V \subset E$  un ouvert. Nous montrons que  $p(V)$  est ouvert. Pour  $x \in p(V)$  on choisit un ouvert trivialisant  $U$ . Comme  $x = p(y)$  pour un  $y \in V$ , il existe un feuillet  $U_i$  contenant  $y$ . De plus  $U_i \cap V$  est un ouvert de  $E$  et donc de  $V$  ayant la propriété que  $p$  se restreint en un homéomorphisme  $U_i \cap V \rightarrow p(U_i \cap V)$ . En particulier  $x$  est contenu dans  $p(U_i \cap V)$  qui est un ouvert de  $X$  contenu dans  $p(V)$ .

La deuxième affirmation est une conséquence du fait qu'une surjection (continue) ouverte est un quotient.  $\square$

Ainsi la topologie de la base d'un revêtement est toujours la topologie quotient. On termine cette première section en établissant un résultat qui a l'air technique et très particulier, mais qui nous sera bien utile pour montrer des résultats d'unicité.

PROPOSITION 1.6. *Soient  $p: E \rightarrow X$  un revêtement et  $Y$  un espace connexe. On se donne  $f, g: Y \rightarrow E$  deux applications telles que  $p \circ f = p \circ g$ . Alors le sous-espace  $Z = \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$  est soit vide, soit  $Y$  tout entier.*

DÉMONSTRATION. On montre que  $Z$  est ouvert et fermé, et on conclut par la connexité de  $Y$ . Pour  $y \in Y$  on choisira dans les deux parties de la preuve un ouvert trivialisant  $U$  de  $p(f(y))$  et on appelle  $U_i$  le feuillet qui contient  $f(y)$ .

Pour montrer que  $Z$  est ouvert, on suppose que  $y \in Z$  et on observe que l'intersection  $f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_i)$  est un ouvert de  $Y$  qui contient  $y$  puisque  $f(y) \in U_i$  par choix et que  $g(y) = f(y)$ . Cet ouvert est entièrement contenu dans  $Z$  parce que  $p|_{U_i}$  est un homéomorphisme et on suppose que  $p \circ f = p \circ g$ .

Pour montrer que  $Z$  est fermé, on suppose que  $y \notin Z$ . Il découle du fait que  $p|_{U_i}$  est un homéomorphisme que  $g(y) \notin U_i$ , car les deux points distincts  $f(y)$  et  $g(y)$  ont la même image par  $p$ . Il existe donc  $j \neq i$  tel que  $g(y)$  appartient au feuillet  $U_j$ . Ici l'intersection  $f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_j)$  est un ouvert de  $Y$  qui contient  $y$  par construction. Aucun point de cet ouvert ne se trouve dans  $Z$  puisque les feuilletts  $U_i$  et  $U_j$  sont disjoints, c'est donc un voisinage ouvert de  $y$  dans  $Y \setminus Z$ .  $\square$

## 2. Morphismes de revêtements

Comme toujours en mathématiques, c'est bien de définir des objets, ici les revêtements, mais pour comprendre les relations entre ces objets il faut aussi parler des "morphisms" entre ces objets.

**DÉFINITION 2.1.** Soient  $p_1: E_1 \rightarrow X$  et  $p_2: E_2 \rightarrow X$  deux revêtements. Une *application de revêtements* ou un *morphisme de revêtements* est une application  $f: E_1 \rightarrow E_2$  telle que  $p_2 \circ f = p_1$ .

Autrement dit, c'est une application entre les espaces totaux qui est compatible avec les projections. En particulier un morphisme de revêtements est un *isomorphisme de revêtements* s'il admet un inverse dans la catégorie des revêtements. Nous nous restreignons maintenant au cas où  $p_1 = p_2$  pour définir la notion d'automorphisme.

**DÉFINITION 2.2.** Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement. Une application de revêtements  $f: E \rightarrow E$  est un *automorphisme de  $p$*  si elle admet un inverse  $g$  comme application de revêtements.

On a donc que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont toutes deux égales à l'identité de  $E$ , et ces applications sont compatibles avec la projection  $p$ . On remarque qu'on peut composer des automorphismes si bien que l'ensemble de tous les automorphismes d'un revêtement  $p$  forme un groupe noté  $\text{Aut}(p)$ .

EXEMPLE 2.3. L'addition d'un nombre entier  $n$  définit sur  $\mathbb{R}$  un automorphisme du revêtement exponentiel au-dessus du cercle. L'ensemble de ces automorphismes forme un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

Il faut bien distinguer entre la composition de morphismes de revêtements, qui est bien définie et ne pose aucun problème (la composition de morphismes est un morphisme), et la composition des revêtements eux-mêmes.

PROPOSITION 2.4. *Soit  $q: E' \rightarrow E$  et  $p: E \rightarrow X$  deux revêtements. La composition  $q \circ p$  est encore un revêtement si les fibres de  $q$  sont finies.*

Cette proposition se trouve dans la série et un contre-exemple est proposé dans le cas où les fibres de  $q$  sont infinies.

### 3. Relèvement de chemins et d'homotopies

La propriété de relèvement des chemins dont nous parlons ici prépare vraiment le terrain à la théorie de l'homotopie moderne (et abstraite), dans laquelle certaines applications, dont font partie les revêtements, jouent un rôle important. On appelle ces applications des *fibrations* et elle vérifient des propriétés de relèvement telles que celle que nous étudions maintenant.

On utilisera la théorie du nombre de Lebesgue étudiée dans le chapitre sur les espaces métriques au premier semestre. Si  $X$  est un espace métrique compact recouvert par des ouverts  $U_i$ , il existe alors un nombre réel  $\delta > 0$  tel que toute boule ouverte  $\mathring{B}(x, \delta)$  centrée en  $x \in X$  est contenue dans un ouvert  $U_i$ . Nous avons déjà rencontré ce type d'argument dans la preuve du Théorème de Seifert-van Kampen lorsque nous avons saucissonné un intervalle ou un carré.

THÉORÈME 3.1. *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement et  $\gamma: I \rightarrow X$  un chemin basé en  $\gamma(0) = x_0 = p(y_0)$ . Il existe alors un unique chemin  $\tilde{\gamma}: I \rightarrow E$  tel que  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  et  $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ .*

Sous forme de diagramme on visualise la situation de la manière illustrée ci-dessous. On a un carré commutatif, donné par les hypothèses du théorème, et on affirme que la flèche traitillée qui fait commuter les deux triangles ainsi formés, existe

et est unique :

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{y_0} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

Le fait que le triangle du haut commute dit que  $\tilde{\gamma}(0) = y_0$  est le point de base choisi dans  $Y$  et le triangle du bas traduit le fait que  $\tilde{\gamma}$  relève  $\gamma$ . Ainsi on affirme que tout chemin dans la base se relève dans l'espace total et que dès que l'on a choisi le point de départ de ce chemin, le relèvement est unique. Passons à la preuve.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $U_\alpha$  un recouvrement de  $X$  par des ouverts trivialisants. Comme  $I$  est compact, on choisit  $\delta$  le nombre de Lebesgue associé au recouvrement de  $I$  par les  $\gamma^{-1}(U_\alpha)$ . Autrement dit, pour un entier  $n$  tel que  $1/n < \delta$ , tout intervalle fermé de diamètre  $1/n$  est envoyé entièrement dans un ouvert trivialisant  $U_\alpha$  par  $\gamma$ .

On construit  $\tilde{\gamma}$  inductivement en commençant par définir ce chemin sur l'intervalle  $[0; 1/n]$ . Il existe  $\alpha_1$  tel que  $\gamma([0; 1/n]) \subset U_{\alpha_1}$  et un feuillet  $U_{\alpha_1, i_1}$  qui contient  $y_0$  puisque  $p(y_0) = x_0 \in U_{\alpha_1}$ . Si  $\varphi_1$  désigne l'homéomorphisme inverse à  $p|_{U_{\alpha_1, i_1}}$  on définit  $\tilde{\gamma}$  sur  $[0; 1/n]$  par la composition

$$[0; 1/n] \xrightarrow{\gamma} U_{\alpha_1} \xrightarrow{\varphi_1} U_{\alpha_1, i_1} \hookrightarrow E$$

Supposons à présent que  $\tilde{\gamma}$  a été défini sur l'intervalle  $[0; k/n]$  et relevons  $\gamma$  sur  $[k/n; (k+1)/n]$ . On dispose du point  $y_k = \tilde{\gamma}(k/n)$  qui se trouve par hypothèse d'induction dans la fibre au-dessus de  $\gamma(k/n)$ . Il existe  $\alpha_{k+1}$  tel que  $\gamma([k/n; (k+1)/n]) \subset U_{\alpha_{k+1}}$  et un feuillet  $U_{\alpha_{k+1}, i_{k+1}}$  qui contient  $y_k$ . Si  $\varphi_{k+1}$  désigne l'homéomorphisme inverse à  $p|_{U_{\alpha_{k+1}, i_{k+1}}}$  on définit  $\tilde{\gamma}$  sur  $[k/n; (k+1)/n]$  par la composition

$$[k/n; (k+1)/n] \xrightarrow{\gamma} U_{\alpha_{k+1}} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} U_{\alpha_{k+1}, i_{k+1}} \hookrightarrow E$$

L'application  $\tilde{\gamma}$  ainsi construite est clairement continue (par choix des valeurs en  $k/n$ ) et elle relève  $\gamma$ . Il reste à montrer l'unicité. Supposons donc qu'on a deux relèvements  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}'$  et considérons le sous-espace  $Z$  de  $I$  qui consiste en tous les points où ces deux chemins coïncident, comme dans la Proposition 1.6. Comme  $\tilde{\gamma}(0) = y_0 = \tilde{\gamma}'(0)$ ,  $Z$  n'est pas vide. Par connexité de  $I$  c'est donc  $I$  tout entier, par le principe du "tout ou rien".  $\square$

Il existe en fait une propriété de relèvement beaucoup plus forte, mais que nous ne démontrons pas.

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement,  $f: Y \rightarrow E$  et  $H: Y \times I \rightarrow X$  une homotopie pour  $p \circ f = H(-, 0)$ . Il existe alors une homotopie  $\tilde{H}: Y \times I \rightarrow E$  pour  $f$  telle que  $p \circ \tilde{H} = H$ .*

Sous forme de diagramme :

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est le corollaire suivant, de relèvement des homotopies de chemins. On peut aussi le montrer en suivant la même stratégie que celle que nous avons suivie ci-dessus, mais bien sûr en remplaçant le saucissonnage de l'intervalle par celui du carré  $I \times I$ . La preuve est en exercice. Une homotopie relative à un sous-espace fixe ce sous-espace tout au long de l'homotopie. Dans l'énoncé suivant les homotopies de chemins sont relatives aux extrémités de ces chemins, c'est-à-dire relatives à 0 et 1. Autrement dit on demande que  $H(0, -)$  est constamment  $x_0$ , le point de départ et  $H(1, -)$  constamment  $x_1$  le point d'arrivée.

**COROLLAIRE 3.3.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement,  $\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}: I \rightarrow E$  deux chemins avec  $\tilde{\beta}(0) = y_0 = \tilde{\gamma}(0)$  et  $H: I \times I \rightarrow X$  une homotopie relative à  $\{0; 1\}$  du chemin  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} = H(-, 0)$  au chemin  $\beta = p \circ \tilde{\beta} = H(-, 1)$ . Il existe alors une unique homotopie  $\tilde{H}: I \times I \rightarrow E$  de  $\tilde{\gamma}$  à  $\tilde{\beta}$  telle que  $p \circ \tilde{H} = H$ .*

La preuve de ce corollaire est une conséquence des observations suivantes et du Théorème 3.2 (ou de la version sur les homotopies entre chemins de la série d'exercices).

- (1)  $H(0, -)$  est un chemin constant si bien que l'unique relèvement qu'il admet est le chemin constant  $y_0$  puisqu'il doit partir de  $y_0 = \tilde{\gamma}(0)$ ;
- (2)  $H(1, -)$  est un chemin constant si bien que l'unique relèvement qu'il admet est un chemin constant  $y_1 = \tilde{\gamma}(1)$  pour la même raison;

- (3)  $\tilde{H}(-, 0)$  est l'unique relèvement de  $\gamma$ , c'est ce qu'on demande et au bout de l'homotopie on trouve un chemin qui relève  $\beta$  et qui commence en  $y_0$ , si bien que par unicité à nouveau ce chemin doit être  $\tilde{\beta}$ .

Les conséquences de l'existence de ces relèvements sont multiples, nous en citons deux pour conclure cette section.

**COROLLAIRE 3.4.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement. Toutes les fibres (discrètes) ont le même cardinal.*

**DÉMONSTRATION.** Soient  $x_0, x_1 \in X$ . Comme  $X$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\gamma: I \rightarrow X$  entre  $x_0 = \gamma(0)$  et  $x_1 = \gamma(1)$ . On sait déjà que les fibres sont discrètes par le Lemme 1.4, il reste à établir une bijection entre elles. Or, le Théorème 3.1 permet de trouver pour tout  $y \in p^{-1}(x_0)$  un *unique* chemin  $\tilde{\gamma}_y$  qui relève  $\gamma$  et tel que  $\tilde{\gamma}_y(0) = y$ . On construit alors une application bien définie

$$\begin{aligned} \Phi: p^{-1}(x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_1) \\ y &\longmapsto \tilde{\gamma}_y(1) \end{aligned}$$

Cette application est une bijection puisqu'on peut construire son inverse de la même manière, en choisissant  $\bar{\gamma}$  comme chemin dans l'autre sens.  $\square$

Pour finir nous montrons que les revêtements induisent toujours des injections au niveau des groupes fondamentaux. C'est peut-être un fait qui n'est pas intuitivement clair puisque l'espace total est "plus gros" que la base, alors que son groupe fondamental est "plus petit".

**COROLLAIRE 3.5.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement. Alors  $p_*: \pi_1 E \rightarrow \pi_1 X$  est un monomorphisme.*

**DÉMONSTRATION.** On applique le Corollaire 3.3 à des lacets  $f, g: I \rightarrow E$ . Ainsi  $f(0) = g(0) = x_0 = f(1) = g(1)$ . Supposons que  $p_*[f] = p_*[g]$ , i.e.  $p \circ f \simeq_* p \circ g$ . Alors il existe une homotopie relative entre  $f$  et  $g$ , i.e.  $[f] = [g]$ .  $\square$

#### 4. Revêtements et actions de groupes

Dans cette section  $G$  est un groupe discret qui agit sur un espace  $X$  à droite. On appelle  $q: X \rightarrow X/G$  l'application quotient et on cherche des conditions sous lesquelles ce quotient est un revêtement.

**DÉFINITION 4.1.** L'action de  $G$  sur  $X$  est *totalelement discontinue* si pour tout  $x \in X$  il existe un voisinage  $U \ni x$  tel que  $U \cdot g \cap U = \emptyset$  pour tout  $g \neq 1_G$ .

On observe que dans le cas d'une action totalement discontinue on a alors aussi  $U \cdot g \cap U \cdot h = \emptyset$  dès que  $g \neq h$ . Il suffit en effet de faire agir  $h^{-1}$  à droite pour se ramener à la définition. À conditions d'imposer les hypothèses standards de ce chapitre sur la topologie de  $X$  toute action totalement discontinue donne lieu à un revêtement.

**PROPOSITION 4.2.** *Si  $G$  agit de manière totalement discontinue sur un espace  $X$  connexe par arcs et localement connexe par arcs, alors le quotient  $q: X \rightarrow X/G$  est un revêtement.*

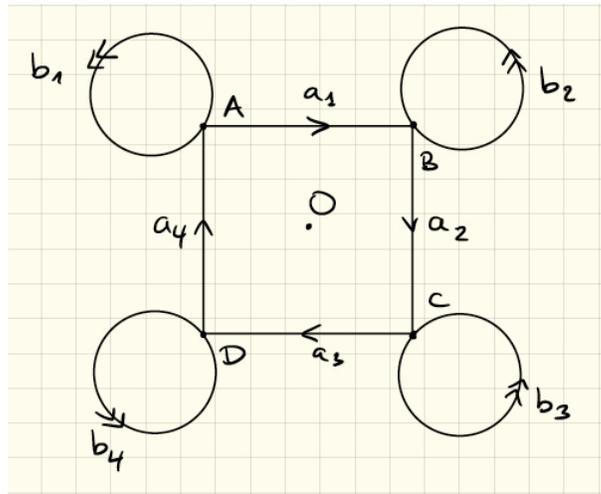
**DÉMONSTRATION.** Soit  $xG$  un point de  $X/G$  et  $U$  un voisinage de  $x$  comme dans la Définition 4.1. Alors  $q^{-1}(q(U)) = \cup_G U \cdot g$ , une réunion disjointe d'ouverts de  $X$  par la remarque faite ci-dessus. En particulier  $q(U)$  est un voisinage ouvert de  $xG$  et on montre que c'est un ouvert trivialisant pour conclure.

Pour cela on considère la restriction de  $q$  à  $U \cdot g$ . Cette application est continue, mais aussi ouverte : si  $V \subset U$ , alors  $q(V) \subset q(U)$  est un ouvert pour la même raison que  $q(U)$  est un ouvert. Comme  $q(V \cdot g) = q(V)$ , cela reste valide pour  $V \cdot g$ . Reste à voir que c'est une bijection  $U \cdot g \rightarrow q(U)$ . La surjectivité est claire et enfin si  $q(ug) = q(vg)$ , alors il existe  $h \in G$  tel que  $ug = vgh$ , si bien que  $h = 1$  car l'action est totalement discontinue. On conclut que  $ug = vg$  : on a bien une bijection et  $U \cdot g \approx q(U)$ , qui est un ouvert trivialisant.  $\square$

Ceci permet de construire de nombreux revêtements.

**EXEMPLE 4.3.** (1) L'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}$  par translations est totalement discontinue. Le quotient est  $S^1$  via l'application exponentielle.

- (2) L'action antipodale de  $C_2$  sur  $S^n$  est totalement discontinue. Le quotient est  $\mathbb{R}P^n$ .
- (3) On peut aussi construire de nombreux revêtements d'un bouquet de cercles. Par exemple l'action du groupe cyclique  $C_4$  sur quatre points, quatre segments et quatre cercles par rotations, comme indiqué ci-dessous, donne un revêtement à quatre feuillets de  $S^1 \vee S^1$ . On va souvent illustrer la théorie avec ce type de revêtements, ils ont la particularité d'avoir une jolie représentation graphique, de ne faire intervenir que des espaces construits par attachements de 1-cellules sur un espace discret.



Ici l'action de  $C_4$  permute cycliquement les arêtes  $a_i$  et de même pour les  $b_i$ . Pour préciser encore, disons que le générateur envoie  $A$  sur  $B$ ,  $B$  sur  $C$ , etc. et  $a_i$  sur  $a_{i+1}$ ,  $b_i$  sur  $b_{i+1}$  où les indices se lisent modulo 4.

### 5. Propriétés de relèvement

Comme nous en avons peut-être eu l'intuition en démontrant la propriété des relèvements des homotopies entre chemins, il est possible de relever d'autres applications grâce aux relèvements *uniques* des chemins. On rappelle que sauf mention du contraire les espaces considérés sont tous connexes par arcs et localement connexes par arcs.

**PROPOSITION 5.1.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement et  $f: Y \rightarrow X$  une application. On fixe des points de base  $e_0 \in E, x_0 \in X$  et  $y_0 \in Y$  de sorte que ces applications sont*

pointées. Alors  $f$  admet un relèvement  $\tilde{f}: Y \rightarrow E$  tel que  $p \circ \tilde{f} = f$  si et seulement si  $f_*(\pi_1 Y) \subset p_*(\pi_1 E)$ .

DÉMONSTRATION. La condition sur les groupes fondamentaux est clairement nécessaire puisque si  $p \circ \tilde{f} = f$ , alors aussi  $p_* \circ \tilde{f}_* = f_*$  et donc l'image de  $f_*$  doit être contenue dans celle de  $p_*$ . C'est le fait que cette condition est nécessaire qui est plus surprenant et nous demandera plus de travail.

Supposons dès maintenant que  $f_*(\pi_1 Y) \subset p_*(\pi_1 E)$  et considérons un point  $y \in Y$ . Par connexité par arcs, il existe un chemin  $\gamma: I \rightarrow Y$  avec  $\gamma(0) = y_0$  et  $\gamma(1) = y$ . Par la propriété de relèvement des chemins, il existe un unique chemin  $\tilde{\gamma}: I \rightarrow E$  qui relève  $f \circ \gamma$ . On pose alors  $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}(1)$ . On remarque que

$$p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{\gamma}(1)) = f(\gamma(1)) = f(y)$$

Nous devons encore montrer que ce relèvement est bien défini et que c'est une fonction continue. Soit  $\gamma'$  un autre chemin de  $y_0$  à  $y$  et  $\tilde{\gamma}'$  le relèvement correspondant. La concaténation des chemins  $f \circ \gamma' \star \overline{f \circ \gamma}$  est alors un lacet  $\omega$  basé en  $x_0 \in X$ . La classe d'homotopie  $[\omega] = f_*[\gamma' \star \bar{\gamma}]$  est dans l'image de  $f_*$  si bien que par hypothèse il existe un lacet  $\tilde{\alpha}$  basé en  $e_0$  tel que  $p_*[\tilde{\alpha}] = [\omega]$ .

On ne peut pas conclure que les lacets  $p \circ \tilde{\alpha}$  et  $\omega$  sont égaux, mais ils sont homotopes (dans le sens pointé). Appelons  $H: I \times I \rightarrow X$  une telle homotopie. Nous sommes dans la situation du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I \times 0 & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ I \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Par la propriété de relèvements des homotopies entre chemins (démontrée en exercice), le relèvement  $\tilde{H}$  existe et forme une homotopie entre  $\tilde{\alpha}$  et un lacet  $\tilde{\omega} = \tilde{H}(-, 1)$ . Par commutativité du diagramme  $\tilde{\omega}$  est un relèvement de  $\omega$ , pas seulement à homotopie près, mais strictement :  $p \circ \tilde{\omega} = \omega$ . Par définition de  $\omega$  il s'agit donc de la concaténation des relèvements de  $f \circ \gamma'$  et de  $\overline{f \circ \gamma}$ . Or, par unicité de ce relèvement, on a  $\tilde{\omega} = \tilde{\gamma}' \star \bar{\tilde{\gamma}}$ . En particulier cette concaténation de chemins doit être un lacet ce qui signifie exactement que  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$ .

Ainsi  $\tilde{f}$  est bien définie, il reste encore à montrer que c'est une application continue, autrement dit que la préimage de tout ouvert  $O$  de  $E$  est ouverte. Pour ce faire nous allons trouver, pour tout point  $e \in O$  et tout  $y \in \tilde{f}^{-1}(e)$  un voisinage ouvert  $y \in V \subset Y$  tel que  $\tilde{f}(V) \subset O$ .

Soit  $U$  un ouvert trivialisant de  $p(e)$  et appelons  $U_e$  le feuillet qui contient  $e$ . On remplace  $U_e$  par  $O \cap U_e$  dès maintenant, et  $U$  par son image par  $p$ , ce qui nous permet de supposer que  $p$  se restreint en un homéomorphisme en un voisinage  $U_e \subset O$  de  $e$ . Comme  $f$  est continue,  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $Y$  qui contient  $y$  car  $f(y) = (p \circ \tilde{f})(y) = p(e)$ . On peut choisir alors un voisinage  $V$  de  $y$  connexe par arcs ( $Y$  est localement connexe par arcs) tel que  $f(V) \subset U$ .

Pour conclure on prouve que  $\tilde{f}(V) \subset U_e \subset O$ . Soit  $v \in V$ . Pour calculer  $\tilde{f}(v)$  on peut choisir n'importe quel chemin allant de  $y_0$  à  $v$  et on décide de fixer un chemin  $\gamma$  de  $y_0$  à  $y$ , puis de le concaténer avec un chemin  $\beta$  allant de  $y$  à  $v$ , entièrement contenu dans  $V$ . Le relèvement de  $\gamma \star \beta$  est la concaténation  $\tilde{\gamma} \star \tilde{\beta}$  où  $\tilde{\beta}$  est le seul chemin de  $E$  relevant  $f \circ \beta$  et satisfaisant  $\tilde{\beta}(0) = \tilde{f}(y)$ . Par définition  $\tilde{f}(v) = \tilde{\beta}(1)$ . Or  $\beta$  étant contenu dans  $V$ ,  $f \circ \beta$  est entièrement contenu dans l'ouvert trivialisant  $U$ , si bien que le relèvement  $\tilde{\beta}$  peut se construire en composant  $f \circ \beta$  avec l'inverse de l'homéomorphisme  $p|_{U_e}$ . En particulier  $\tilde{\beta}$  est contenu dans  $U_e$  ce qui termine la démonstration.  $\square$

## 6. Le revêtement universel

La proposition précédente donne non seulement un critère pratique permettant de comprendre quelles applications on peut relever dans l'espace total d'un revêtement, elle indique aussi que si  $p: E \rightarrow X$  est un revêtement avec  $\pi_1 E = 1$ , alors on peut toujours relever  $p$  dans l'espace total d'un revêtement arbitraire  $p': E' \rightarrow X$  puisque l'image de  $p_*$  sera alors réduite à l'élément neutre. Ainsi  $p$  factorise comme la composition

$$p: E \xrightarrow{\tilde{p}} E' \xrightarrow{p'} X$$

Tout revêtement est coincé entre l'espace total  $E$  et la base  $X$ . De fait nous verrons qu'on peut obtenir tous les revêtements à partir de ce revêtement.

EXEMPLE 6.1. Le revêtement exponentiel  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  a cette particularité que  $\pi_1 \mathbb{R} = 1$ . Les autres revêtements du cercle que nous connaissons (et il n'y en pas d'autre), i.e. les applications de degré  $n$  données par  $f_n: S^1 \rightarrow S^1$  où  $f_n(e^{it}) = e^{int}$  reçoivent un relèvement  $\tilde{p}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  à savoir  $\tilde{p}(t) = e^{it/n}$  de sorte que  $p = f_n \circ \tilde{p}$ .

DÉFINITION 6.2. Un revêtement  $\tilde{X}$  de  $X$  est appelé *revêtement universel* si le groupe fondamental de son espace total est trivial :  $\pi_1 \tilde{X} = 1$ .

REMARQUE 6.3. Si un revêtement universel existe, considérons un ouvert trivialisant  $U \subset X$ . Alors on a la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

et nous savons que le relèvement indiqué en traitillés existe puisqu'on peut choisir l'inverse de l'homéomorphisme entre un feuillet et  $U$ . Par conséquent on tire de la Proposition 5.1 que  $i_*(\pi_1 U) \subset p_*(\pi_1 \tilde{X}) = 1$ . Ceci indique que  $X$  ne peut être un espace arbitraire, il doit exister des voisinages dans lesquels les lacets sont contractiles dans  $X$ . Par exemple les voisinages peuvent être contractiles ou simplement connexes, auquel cas  $\pi_1 U = 1$ , mais la condition nécessaire que nous donnons ci-dessous est moins forte.

DÉFINITION 6.4. Un espace  $X$  est *semi-localement simplement connexe* si tout point  $x \in X$  admet un voisinage  $U$  tel que l'inclusion  $i: (U; x) \subset (X; x)$  induit l'homomorphisme trivial  $i_* \pi_1(U; x) \rightarrow \pi_1(X; x)$ .

La Remarque 6.3 nous a permis de comprendre la chose suivante.

LEMME 6.5. *Si un revêtement universel de  $X$  existe, alors  $X$  est semi-localement simplement connexe.*  $\square$

Avant de passer à la construction des revêtements universels et de montrer ainsi que la condition précédente est suffisante, nous donnons l'idée générale. Les démonstrations des propriétés de relèvement nous ont donné l'intuition que les relèvements de chemins jouent un rôle central : nous avons vu que les points de l'espace total

correspondent précisément aux extrêmités des relèvements de chemins, au choix des chemins près dans la base.

On décide donc de construire  $\tilde{X}$  comme l'ensemble  $\{[\gamma] \mid \gamma: I \rightarrow X; \gamma(0) = x_0\}$ . On précise que  $X$  est un espace pointé, dont le point de base est  $x_0$  et que les classes d'homotopie  $[\gamma]$  sont des classes relatives aux extrêmités, c'est-à-dire que deux chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  allant tous deux de  $x_0$  à un point  $x$  sont homotopes (rel  $\{0; 1\}$ ) s'il existe une homotopie  $H$  telle que

- (1)  $H$  commence en  $\gamma$ , i.e. on a  $H(s, 0) = \gamma(s)$  pour tout  $0 \leq s \leq 1$ ;
- (2)  $H$  finit en  $\gamma'$ , i.e. on a  $H(s, 1) = \gamma'(s)$  pour tout  $0 \leq s \leq 1$ ;
- (3)  $H$  fixe  $x_0$  pendant toute l'homotopie, i.e.  $H(0; t) = x_0$  pour tout  $0 \leq t \leq 1$ ;
- (4)  $H$  fixe  $x$  pendant toute l'homotopie, i.e.  $H(1; t) = x$  pour tout  $0 \leq t \leq 1$ .

Pour munir l'ensemble  $\tilde{X}$  d'une topologie, on construit d'abord une base d'ouverts de la topologie de  $X$  adaptée à la situation.

**DÉFINITION 6.6.** On appelle  $\mathcal{B}$  l'ensemble de tous les ouverts  $U$  de  $X$  qui sont connexes par arcs et tels que  $\pi_1 U \rightarrow \pi_1 X$  est l'homomorphisme trivial.

On se permet ici de ne pas indiquer le point de base puisque n'importe quel point de  $U$  fait l'affaire et on choisira le même point de base dans  $X$  pour comparer les groupes fondamentaux.

**REMARQUE 6.7.** Puisque  $U$  et  $X$  sont connexes par arcs tout autre choix de point de base donne des groupes fondamentaux isomorphes. Soient  $u, u' \in U$  deux points et  $\gamma$  un chemin dans  $U$  entre  $u$  et  $u'$ . Alors la conjugaison par  $\gamma$  induit un isomorphisme  $\pi_1(U; u) \rightarrow \pi_1(U; u')$  défini explicitement par  $\omega \mapsto \bar{\gamma} \star \omega \star \gamma$ , et il en va de même pour  $X$ . En particulier l'homomorphisme  $\pi_1(U; u) \rightarrow \pi_1(X; u)$  est trivial si et seulement si  $\pi_1(U; u') \rightarrow \pi_1(X; u')$  est trivial.

On montre que  $\mathcal{B}$  forme bien une base d'ouverts de la topologie de  $X$ .

**LEMME 6.8.** *Soit  $X$  un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors  $\mathcal{B}$  forme une base d'ouverts de la topologie de  $X$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $O$  un ouvert de  $X$ . On doit montrer d'abord que tout point  $x \in O$  admet dans  $O$  un voisinage ouvert  $U \in \mathcal{B}$ . Or, comme  $X$  est semi-localement simplement connexe il existe un ouvert  $O_1$ , voisinage de  $X$  tel que  $\pi_1(O_1; x) \rightarrow \pi_1(X; x)$  est l'homomorphisme trivial. Puisque  $X$  est aussi localement connexe par arcs, il existe un ouvert connexe par arcs  $U \subset O \cap O_1$  qui contient  $x$ . Alors la composition suivante est l'homomorphisme induit par l'inclusion  $U \subset X$  :

$$\pi_1(U; x) \rightarrow \pi_1(O \cap O_1; x) \rightarrow \pi_1(O_1; x) \rightarrow \pi_1(X; x)$$

Le dernier homomorphisme étant trivial, la composition aussi, si bien que  $U \in \mathcal{B}$ .

Il reste encore à vérifier que tout point  $x$  de l'intersection de deux ouverts  $U, V$  de  $\mathcal{B}$  admet un voisinage de  $\mathcal{B}$  dans  $U \cap V$ . Le seul problème éventuel est la connexité par arcs, on choisit donc la composante connexe par arcs  $C$  de  $U \cap V$  qui contient  $x$ . Cette composante est un ouvert connexe par arcs et finalement, comme avant, la composition

$$\pi_1(C; x) \rightarrow \pi_1(U \cap V; x) \rightarrow \pi_1(U; x) \rightarrow \pi_1(X; x)$$

est triviale. Ainsi  $C \in \mathcal{B}$ . □

Nous sommes prêts à construire une base d'ouverts définissant une topologie sur l'ensemble  $\tilde{X}$ .

DÉFINITION 6.9. Soit  $\gamma: I \rightarrow X$  un chemin avec  $\gamma(0) = x_0$  et  $[\gamma]$  la classe d'homotopie relative à  $\{0; 1\}$ . Pour  $U \in \mathcal{B}$  un ouvert de base contenant  $x = \gamma(1)$ , on pose  $U_{[\gamma]} = \{[\gamma \star \beta] \in \tilde{X} \mid \beta: I \rightarrow U; \beta(0) = x\}$ .

LEMME 6.10. *Soit  $X$  un espace connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors les  $U_{[\gamma]}$  forment une base d'ouverts  $\tilde{\mathcal{B}}$  d'une topologie sur  $\tilde{X}$ .*

DÉMONSTRATION. On doit d'abord montrer que les ouverts de base recouvrent tout  $\tilde{X}$ . Soit donc  $[\gamma] \in \tilde{X}$ , dont un représentant est un chemin  $\gamma: I \rightarrow X$  avec  $\gamma(0) = x_0$ . Appelons  $\gamma(1) = x$ . Comme  $\mathcal{B}$  est une base par le Lemme 6.8, il existe un ouvert  $U \in \mathcal{B}$  contenant  $x$ . Alors, si  $c_x$  est le chemin constant  $[\gamma] = [\gamma \star c_x] \in U_{[\gamma]}$ .

On doit aussi traiter le cas d'une intersection de deux ouverts de base. Soient  $U_{[\gamma]}, V_{[\gamma]} \in \tilde{\mathcal{B}}$  et  $[\alpha]$  un élément de leur intersection (si l'intersection est vide il n'y

a rien à faire). Comme  $[\alpha] \in U_{[\gamma]}$ , il existe un chemin  $\beta$  contenu dans  $U$  tel que  $[\gamma \star \beta] = [\alpha]$ . On affirme qu'alors  $U_{[\gamma]} = U_{[\alpha]}$ . En effet, pour tout chemin  $\delta$  dans  $U$  avec  $\delta(0) = \alpha(1)$  on a d'une part

$$[\alpha \star \delta] = [\gamma \star \beta \star \delta] \in U_{[\gamma]}$$

et d'autre part pour tout chemin  $\beta'$  dans  $U$  avec  $\beta'(0) = \gamma(1)$  on a

$$[\gamma \star \beta'] = [\gamma \star \beta \star \bar{\beta} \star \beta'] = [\alpha \star \bar{\beta} \star \beta'] \in U_{[\alpha]}$$

Par le même argument on établit l'égalité  $V_{[\gamma]} = V_{[\alpha]}$ . Pour conclure on profite du fait que  $\mathcal{B}$  est une base d'ouverts de la topologie de  $X$  et on choisit un ouvert  $W \subset U \cap V$  contenant  $\alpha(1)$ . Alors l'inclusion  $W_{[\alpha]} \subset U_{[\alpha]} \cap V_{[\alpha]}$  est claire et comme  $[\alpha] \in W_{[\alpha]}$  comme montré ci-dessus, la démonstration est terminée.  $\square$

**COROLLAIRE 6.11.** *Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux chemins avec  $\gamma(0) = x_0 = \gamma'(0)$  et  $\gamma(1) = x = \gamma'(1)$  tels que  $[\gamma] \neq [\gamma']$ . Alors, si  $U$  est un ouvert de  $\mathcal{B}$  contenant  $x$ , on a  $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} = \emptyset$*

**DÉMONSTRATION.** Si  $[\alpha]$  est un élément de l'intersection  $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']}$ , alors, comme dans la preuve ci-dessus, on conclut que  $U_{[\gamma]} = U_{[\alpha]} = U_{[\gamma']}$ . En particulier, il existe un chemin  $\beta'$  dans  $U$  tel que  $[\gamma] = [\gamma' \star \beta']$ . Les chemins étant composables et les classes d'homotopie étant relatives on voit que  $\beta'$  est un lacet basé en  $x$  car il commence en  $\gamma'(1) = x$  et s'arrête en  $\gamma(1) = x$ . Par choix de  $\mathcal{B}$  le lacet  $\beta'$  est donc contractile dans  $X$ , i.e.  $\beta' \simeq_* c_x$ . Ainsi, dans  $X$ , on a  $[\gamma] = [\gamma' \star \beta'] = [\gamma' \star c'_x] = [\gamma']$ .  $\square$

Nous avons choisi une base d'ouverts convenable dans  $X$  et construit une topologie sur  $\tilde{X}$ . Nous sommes prêts à définir une application  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  et il faudra encore montrer que  $p$  est continue, que c'est aussi un revêtement, et enfin que ce revêtement est universel. En particulier  $\tilde{X}$  doit être un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs. On commence par relever les chemins de  $X$  dans l'espace  $\tilde{X}$ .

**LEMME 6.12.** *Soit  $\gamma: I \rightarrow X$  un chemin avec  $\gamma(0) = x_0$ . L'application  $\Gamma: I \rightarrow \tilde{X}$  définie par  $\Gamma(t) = [\gamma_t]$ , où  $\gamma_t$  est le chemin  $\gamma|_{[0,t]}$ , est continue. En particulier  $\tilde{X}$  est connexe par arcs.*

DÉMONSTRATION. La preuve de la continuité est en exercice. L'idée est de calculer la préimage d'un ouvert de base  $U_{[\alpha]}$ . Si  $\gamma$  ne rencontre pas  $U$ , cette préimage est vide (et donc ouverte), mais si  $t \in \Gamma^{-1}(U_{[\alpha]})$ , cela signifie que  $\gamma_t$  est homotope à un chemin de la forme  $\alpha \star \beta$  avec  $\beta$  un chemin dans  $U$ , et  $U_{[\alpha]} = U_{[\gamma_t]}$  comme ci-dessus.

En particulier  $\gamma(t) \in U$  et par continuité du chemin  $\gamma$  on en déduit qu'il existe un voisinage ouvert de  $t$  de la forme  $]t - \epsilon, t + \epsilon[ \cap I$  dans la préimage de  $U$ . On affirme qu'alors ce même ouvert de  $I$  est également contenu dans  $\Gamma^{-1}(U_{[\gamma_t]})$ , ce qui suit du fait que le chemin parcouru par  $\gamma$  entre le temps  $t$  et  $t + a$  pour  $|a| < \epsilon$  est contenu dans  $U$ .

La continuité étant admise, on observe que  $\Gamma$  est un chemin dans  $\tilde{X}$  entre le point de base  $[c_{x_0}]$  et  $[\gamma]$ , si bien que  $\tilde{X}$  est connexe par arcs.  $\square$

Les autres propriétés vont suivre de l'existence d'ouverts trivialisants pour  $p$ , dont l'existence va nous prendre la plus grande partie de la preuve suivante.

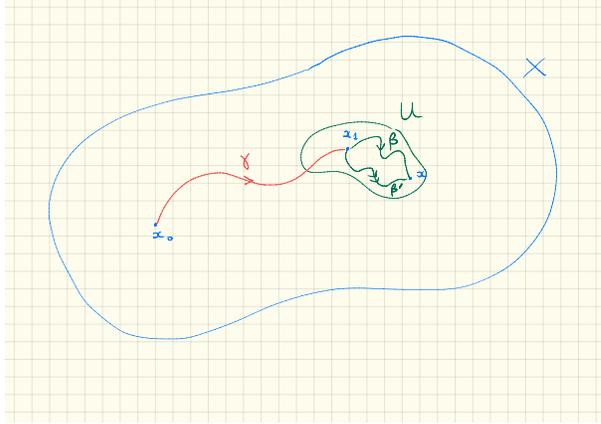
PROPOSITION 6.13. *L'application  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ , définie par  $p[\gamma] = \gamma(1)$ , est un revêtement. Elle est en particulier continue et  $\tilde{X}$  est localement connexe par arcs.*

DÉMONSTRATION. La connexité par arcs de  $X$  montre que  $p$  est surjective. La continuité de  $p$  vient du fait que la préimage de  $U$  par  $p$  est par définition la réunion des  $U_{[\gamma]}$  pour tous les chemins  $\gamma$  qui se terminent dans  $U$ . Par connexité par arcs de  $U$  on peut fixer un point  $x_1 \in U$  et seulement considérer les chemins qui se terminent en  $x_1$ , quitte à concaténer avec un chemin dans  $U$  et son inverse, comme dans la preuve du Lemme 6.10. Le Corollaire 6.11 montre ensuite que cette préimage est une réunion disjointe de  $U_{[\gamma]}$ , où la réunion est prise sur toutes les classes d'homotopie relative de chemins de  $x_0$  à  $x_1$ .

Pour montrer que les ouverts de la base  $\mathcal{B}$  sont tous des ouverts trivialisants pour  $p$ , on doit démontrer que les feuillettes sont les  $U_{[\gamma]}$ . On observe avant de se lancer dans la preuve que ceci implique que  $\tilde{X}$  est localement connexe par arcs puisque chaque  $U_{[\gamma]}$  est connexe par arcs, étant homéomorphe à  $U$ . Montrons donc que  $p|_{U_{[\gamma]}}$  est un homéomorphisme sur  $U$ . C'est une surjection parce que  $U$  est connexe par arcs.

Ainsi, pour tout  $x \in U$ , il existe un chemin  $\beta$  contenu dans  $U$  entre  $x_1$  et  $x$ . Alors  $p[\gamma \star \beta] = \beta(1) = x$ .

L'injectivité est un peu plus délicate. Supposons que  $\beta, \beta': I \rightarrow U$  sont deux chemins allant de  $x_1$  à  $x$  si bien que les éléments  $[\gamma \star \beta]$  et  $[\gamma \star \beta']$  de  $U_{[\gamma]}$  ont même image sous  $p$  (ils se terminent au même endroit).



On doit montrer qu'ils sont égaux. Considérons le lacet  $\beta' \star \bar{\beta}$  basé en  $x_1$ . Comme  $U \in \mathcal{B}$  ce lacet est contractile dans  $X$  via une homotopie pointée  $H$ . Ainsi  $H(-, 1) = c_{x_1}$  et  $H(-, 0) = \beta' \star \bar{\beta}$ .

Ainsi, puisque les homotopies pointées de lacets sont des homotopies relatives aux extrémités de ces chemins fermés, on a  $[\gamma] = [\gamma \star c_{x_1}] = [\gamma \star \beta' \star \bar{\beta}]$ . Par conséquent on a aussi

$$[\gamma \star \beta] = [\gamma \star \beta' \star \bar{\beta} \star \beta] = [\gamma \star \beta' \star c_x] = [\gamma \star \beta']$$

ce qui établit l'injectivité. Comme  $p$  est continue, il reste seulement à voir qu'elle est ouverte, ce qui suit du fait que  $p(U_{[\gamma]}) = U$ .  $\square$

**THÉORÈME 6.14.** *L'application  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  est un revêtement universel.*

**DÉMONSTRATION.** Il faut montrer que  $\tilde{X}$  est connexe par arcs et simplement connexe. C'est un espace connexe par arcs par le Lemme 6.12 et on prouve maintenant que  $\pi_1 \tilde{X} = 1$ .

Soit  $\Omega$  un lacet basé en  $[c_{x_0}]$ , notre point de base favori au-dessus de  $x_0$ . Alors  $\omega = p \circ \Omega$  est un lacet de  $X$  basé en  $x_0$ , si bien qu'il admet un unique relèvement, i.e. un chemin  $\tilde{\omega}$ , une fois que l'on choisit son origine  $\tilde{\omega}(0) = [c_{x_0}]$ . Or le chemin  $t \mapsto [\omega_t]$

construit dans le Lemme 6.12 est un relèvement de  $\omega$  et en  $t = 0$  on a bien  $\omega_0 = c_{x_0}$ . C'est donc ce relèvement unique.

Mais  $\Omega$  aussi est un relèvement de  $\omega$  par définition de ce dernier. On conclut de cela qu'en particulier ces relèvements coïncident à la fin du chemin, c'est-à-dire  $[\omega_1] = [\omega]$  est égal dans  $\tilde{X}$  à  $\Omega(1)$ . Or,  $\Omega$  est un lacet, ce qui signifie que  $\Omega(1) = \Omega(0) = [c_{x_0}]$ . Autrement dit  $[c_{x_0}] = [\omega] = p_*[\Omega]$ .

On conclut alors par injectivité de  $p_*$  (c'est vrai pour tout revêtement) que  $\Omega$  est homotope au lacet constant.  $\square$

## 7. Monodromie

Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement. On choisit un point de base  $x_0 \in X$  et un point de base  $e_0 \in p^{-1}(x_0)$  dans la fibre de  $p$  au-dessus de  $x_0$  de sorte que l'on peut voir  $p$  comme une application pointée. On étudie dans cette section les relations qu'il y a entre le groupe fondamental de  $X$  et les changements de point de base dans  $E$ .

On rappelle que si  $\omega$  est un lacet de  $X$  basé en  $x_0$ , alors il existe un unique relèvement  $\tilde{\omega}$  dans  $E$  dans le sens suivant : dès que l'origine  $e_0$  est fixée,  $\tilde{\omega}$  est le seul chemin tel que  $\tilde{\omega}(0) = e_0$  et  $p \circ \tilde{\omega} = \omega$ .

**DÉFINITION 7.1.** Le groupe fondamental  $\pi_1(X; x_0)$  agit sur  $p^{-1}(x_0)$  à droite par  $e_0 \cdot [\omega] = \tilde{\omega}(1)$ . On appelle cette action la *monodromie*.

On remarque que cette action est bien définie grâce aux propriétés de relèvement unique des chemins et des homotopies entre chemins. Les mêmes raisons montrent qu'il s'agit bien d'une action :

**REMARQUE 7.2.** Concrètement si  $\omega$  est un lacet basé en  $x_0$  on le relève en un unique chemin  $\tilde{\omega}$  d'origine  $e_0 \in p^{-1}(x_0)$  et  $e_0 \cdot [\omega] = \tilde{\omega}(1) = e_1$ . Pour faire agir  $[\alpha]$  sur  $e_1$  on répète le procédé et on relève ce lacet en un chemin  $\tilde{\alpha}$  commençant en  $e_1$  et se terminant en  $(e_0 \cdot [\omega]) \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}(1)$ . Or le chemin  $\tilde{\omega} \star \tilde{\alpha}$  est le seul chemin d'origine  $e_0$  qui relève la concaténation des lacets  $\omega \star \alpha$ . Ainsi  $(e_0 \cdot [\omega]) \cdot [\alpha] = e_0 \cdot ([\omega][\alpha])$ .

**PROPOSITION 7.3.** *L'action de monodromie est transitive sur la fibre  $p^{-1}(x_0)$ , le stabilisateur de  $e_0$  est le sous-groupe  $p_*(\pi_1(E; e_0)) < \pi_1(X; x_0)$  et la fibre  $p^{-1}(x_0)$  est un ensemble en bijection avec le quotient  $\pi_1(X; x_0)/p_*(\pi_1(E; e_0))$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $e \in p^{-1}(x_0)$ . Comme  $E$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\tilde{\omega}$  de  $e_0$  à  $e$ . Alors  $p \circ \tilde{\omega}$  est un lacet  $\omega$  tel que  $e_0 \cdot [\omega] = e$ , ce qui montre la transitivité.

Le stabilisateur de  $e_0$  est constitué des classes d'homotopie de lacets qui se relèvent en un lacet. Nous avons vu en exercice qu'il s'agit précisément des classes dans l'image de  $p_*$ . On tire de cela que l'action de monodromie factorise par le quotient  $\pi_1(X; x_0)/p_*(\pi_1(E; e_0))$  et on conclut par transitivité.  $\square$

Pour établir ce résultat nous avons fixé un point de base dans la fibre au-dessus de  $x$ , mais on pourrait en choisir un autre. Aussi, au vu de la démonstration (en exercice) de l'unicité du revêtement universel, on pourrait penser que tous les revêtements sont classifiés par leur groupe fondamental. Il faut être plus soigneux !

LEMME 7.4. *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement,  $e, e' \in p^{-1}(x_0)$  deux points dans la fibre au-dessus de  $x$ . Alors les groupes  $p_*(\pi_1(E; e))$  et  $p_*(\pi_1(E; e'))$  sont conjugués dans  $\pi_1(X; x_0)$ .*

DÉMONSTRATION. Puisque  $E$  est connexe par arcs il existe un chemin  $\tilde{\omega}$  entre  $e$  et  $e'$  et  $p \circ \tilde{\omega} = \omega$  est un lacet de  $X$  basé en  $x_0$ . Pour écrire un isomorphisme entre  $\pi_1(E; e)$  et  $\pi_1(E; e')$  on utilise ce chemin, pour conjuguer un lacet  $\tilde{\alpha}$  basé en  $e$  et obtenir  $\tilde{\omega} \star \tilde{\alpha} \star \tilde{\omega}$  un lacet basé en  $e'$ . Or, l'image d'une telle concaténation de lacets par  $p$  est le lacet  $\tilde{\omega} \star \alpha \star \omega$ .

Au niveau des groupes fondamentaux on obtient alors que l'image  $p_*(\pi_1(E; e'))$  est le conjugué  $[\omega]^{-1}p_*(\pi_1(E; e))[\omega]$ .  $\square$

Rappelons que deux revêtements sont isomorphes s'il existe un morphisme de revêtements inversible au-dessus de la base.

PROPOSITION 7.5. *Deux revêtements  $p: E \rightarrow X$  et  $p': E' \rightarrow X$  sont isomorphes si et seulement si les sous-groupes  $p_*(\pi_1(E; e))$  et  $p'_*(\pi_1(E'; e'))$  sont conjugués dans  $\pi_1(X; x_0)$ .*

DÉMONSTRATION. On choisit un point de base  $x_0 \in X$  et des points de base  $e$  et  $e'$  dans les fibres respectives de  $p$  et  $p'$ . Si les revêtements sont isomorphes, il existe des morphismes de revêtement  $f: E \rightarrow E'$  et  $g: E' \rightarrow E$  tels que  $g \circ f = id_E$  et

$f \circ g = id_{E'}$ . Ces applications ne sont peut-être pas pointées si bien que les groupes fondamentaux de  $E$  et  $E'$  sont isomorphes après conjugaison par un chemin comme dans le Lemme 7.4. Les images sont donc conjuguées dans  $\pi_1(X; x_0)$ .

Réciproquement supposons qu'il existe un lacet  $\omega$  de  $X$  basé en  $x_0$  tel que

$$[\omega]^{-1} p_*(\pi_1(E; e))[\omega] = p'_*(\pi_1(E'; e'))$$

Si on choisit  $\epsilon = \tilde{\omega}(1)$  comme point de base au lieu de  $e$  (en relevant le lacet de  $X$  en un chemin de  $E$  d'origine  $e$ ), alors par le lemme précédent on a  $p_*(\pi_1(E; \epsilon)) = p'_*(\pi_1(E'; e'))$ . Ceci permet de relever  $p$  en une application pointée  $f: (E, \epsilon) \rightarrow (E'; e')$  et aussi  $p'$  en une application pointée  $g: (E'; e') \rightarrow (E, \epsilon)$  par la Proposition 5.1. La composition  $g \circ f$  relève alors  $p$  dans  $E$  et envoie  $\epsilon$  sur lui-même. L'identité aussi est un tel relèvement et on conclut par le principe du "tout ou rien" que  $g \circ f = id_E$ . Le même raisonnement s'applique à  $f \circ g$  et on conclut que les revêtements sont isomorphes.  $\square$

Pour obtenir l'isomorphisme, nous avons dû choisir un nouveau point de base dans  $E$ . On ne peut pas fixer les points de base à l'avance et s'attendre à obtenir un isomorphisme pointé.

## 8. Correspondance galoisienne

On vient de voir qu'il est naturel d'étudier la classification des revêtements à isomorphisme près et qu'alors il vaut mieux se concentrer sur les classes de conjugaison de sous-groupes de  $G = \pi_1(X; x_0)$  à cause de la flexibilité du choix du point de base dans l'espace total. Dans cette section nous établissons précisément une classification des revêtements en fonction de ces classes de conjugaison de sous-groupes. Dans les sections suivantes nous porterons notre attention sur les sous-groupes normaux, comme en algèbre.

Soit  $\text{Cov}(X)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme des revêtements de  $X$  (on ne fixe pas le point de base de l'espace total) et  $\text{Conj}(G)$  l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes du groupe fondamental  $G$ . On définit deux applications. La première associe à un sous-groupe  $H < G$  un quotient du revêtement universel  $\tilde{X}$  par la relation d'équivalence suivante :  $[\gamma] \sim [\gamma']$  si et seulement si  $[\gamma \star \bar{\gamma}'] \in H$ . Nous avons montré en exercice que ce quotient forme un revêtement  $p_H: X_H \rightarrow X$  et

qu'avec le choix du point de base donné par l'image de  $[c_{x_0}] \in \tilde{X}$ , on a  $\text{Im}(p_H)_* = H$ . Ceci définit notre première application

$$\begin{aligned} \Phi: \text{Conj}(G) &\longrightarrow \text{Cov}(X) \\ [H] &\longmapsto X_H \end{aligned}$$

La Proposition 7.5 montre que le type d'isomorphisme du revêtement ne dépend que de la classe de conjugaison de  $H$ , i.e.  $\Phi$  est bien définie. L'analyse rappelée ci-dessus sur le groupe fondamental de  $X_H$  démontre aussi que notre deuxième application

$$\begin{aligned} \Psi: \text{Cov}(X) &\longrightarrow \text{Conj}(G) \\ E &\longmapsto [p_*(\pi_1(E; e))] \end{aligned}$$

est un inverse à gauche de  $\Phi$  puisque  $\Psi(\Phi[H]) = \Psi(X_H) = [H]$ . Il ne reste plus qu'à démontrer que l'autre composition est aussi l'identité pour obtenir le premier Théorème de Correspondance galoisienne pour les revêtements.

**THÉORÈME 8.1.** *Les applications  $\Phi$  et  $\Psi$  établissent une bijection entre  $\text{Cov}(X)$  et  $\text{Conj}(G)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement et, pour un choix de point de base  $e \in p^{-1}(x_0)$ , soit  $H = p_*(\pi_1(E; e))$ . On construit alors  $X_H$  le revêtement associé et on doit montrer que  $E$  et  $X_H$  sont isomorphes en tant que revêtements de  $X$ . C'est encore la Proposition 7.5 qui nous permet de conclure puisque les images des groupes fondamentaux de  $E$  et de  $X_H$  sont toutes deux égales à  $H$ .  $\square$

Il peut être utile de remarquer ici que le groupe fondamental d'un revêtement s'injecte dans le groupe fondamental de la base ce qui explique pourquoi les images de ces groupes ont une chance de déterminer le revêtement.

## 9. Groupes d'automorphismes

Pour un revêtement  $p: E \rightarrow X$  nous avons deux actions de groupes. L'une est celle du groupe  $\text{Aut}(p)$  des automorphismes de  $p$ , qui agit naturellement à gauche sur l'espace total  $X$  (en fixant la base) :

$$\text{Aut}(p) \times E \rightarrow E; \quad f \cdot e = f(e)$$

Pour obtenir une action à droite on doit faire agir  $f$  par son inverse :  $e \cdot f = f^{-1}(e)$ . L'autre action est la monodromie du groupe fondamental  $\pi_1(X; x_0)$  sur la fibre  $p^{-1}(x_0)$ . Notre but est de comprendre les liens entre ces deux actions et nous verrons qu'ils sont particulièrement étroits pour les revêtements les plus réguliers, appelés galoisiens. Dans cette section on passe par un intermédiaire utile, un certain groupe de bijections d'une fibre.

Si  $f \in \text{Aut}(p)$ , alors  $p \circ f(e) = p(e) = x_0$  pour tout  $e$  dans la fibre au-dessus de  $x_0$ . Ainsi on peut associer à  $f$  sa restriction à  $p^{-1}(x_0)$ . On montre que cette application est  $\pi_1(X; x_0)$ -équivariante, i.e. elle est compatible avec l'action du groupe fondamental.

LEMME 9.1. *On a  $f(e \cdot [\omega]) = f(e) \cdot [\omega]$  pour tout  $[\omega] \in \pi_1(X; x_0)$ .*

DÉMONSTRATION. Par définition de la monodromie on a  $e \cdot [\omega] = \tilde{\omega}(1)$ . Or  $f \circ \tilde{\omega}$  est un chemin qui relève  $\omega$  et commence en  $f(e)$ . Ainsi  $f(e) \cdot [\omega] = (f \circ \tilde{\omega})(1) = f(\tilde{\omega}(1))$ .  $\square$

Pour ne pas alourdir la terminologie on dira simplement que la bijection  $f|_{p^{-1}(x_0)}$  est  $\pi_1(X; x_0)$ -équivariante.

PROPOSITION 9.2. *L'application qui associe à tout  $f \in \text{Aut}(p)$  la restriction de  $f$  à  $p^{-1}(x_0)$  établit une bijection entre  $\text{Aut}(p)$  et les bijections  $\pi_1(X; x_0)$ -équivariantes de  $p^{-1}(x_0)$ .*

DÉMONSTRATION. Le fait que  $f|_{p^{-1}(x_0)}$  est une bijection vient du fait que  $f$  a un inverse. On sait déjà qu'un automorphisme  $f$  est déterminé par l'image d'un point de la fibre (comme relèvement de l'identité et le principe du tout ou rien). Il reste donc à montrer que toute bijection équivariante  $\phi$  provient de l'action d'un automorphisme. On choisit un point de base  $e_0$  dans la fibre et on considère le stabilisateur de  $e_0$  qui est  $p_*(\pi_1(E; e_0))$  par la Proposition 7.3. Si  $\phi(e_0) = e_1$ , on calcule pour  $[\omega] \in p_*(\pi_1(E; e_0))$  :

$$e_1 \cdot [\omega] = \phi(e_0) \cdot [\omega] = \phi(e_0 \cdot [\omega]) = \phi(e_0) = e_1$$

Ainsi  $p_*(\pi_1(E; e_0)) \subset p_*(\pi_1(E; e_1))$  (le stabilisateur de  $e_1$ ), si bien que nous obtenons un relèvement  $f: E \rightarrow E$  qui envoie  $e_0$  sur  $e_1$ . On prétend que  $\phi$  est la restriction

de  $f$  à la fibre. Soit  $e \in p^{-1}(x_0)$ . Par transitivité de l'action de  $\pi_1(X; x_0)$  il existe un  $[\omega]$  tel que  $e = e_0 \cdot [\omega]$ . Alors on conclut par équivariance que

$$f(e) = f(e_0 \cdot [\omega]) = f(e_0) \cdot [\omega] = e_1 \cdot [\omega] = \phi(e_0) \cdot [\omega] = \phi(e_0 \cdot [\omega]) = \phi(e)$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

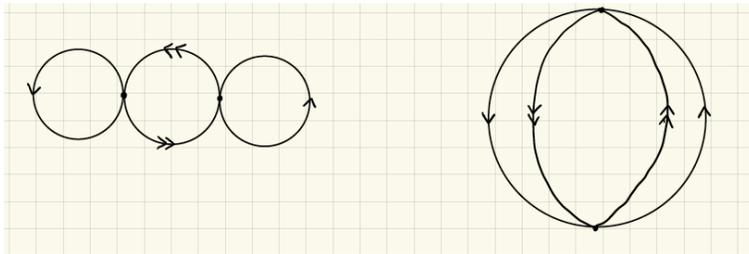
On remarque que les deux ensembles sont munis de lois de groupes données par la composition, la bijection ci-dessus est donc promue en un isomorphisme de groupes. Ce qui va nous permettre de faire le lien entre l'action du groupe des automorphismes d'un revêtement et celui du groupe fondamental sur les fibres, c'est que cette dernière action est une action de groupe, voir Remarque 7.2.

### 10. Revêtements galoisiens

Pour compléter l'analogie avec la correspondance galoisienne classique pour les extensions de corps, on identifie parmi les revêtements les plus symétriques dans un certain sens. Si le groupe de Galois algébrique permute les racines du polynôme minimal, le groupe fondamental permute les points de la fibre  $p^{-1}(x_0)$ .

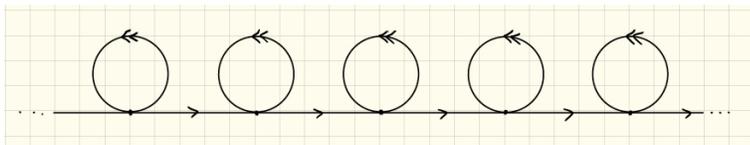
**DÉFINITION 10.1.** Un revêtement  $p: E \rightarrow X$  est *galoisien* si pour toute paire de points  $e, e' \in p^{-1}(x)$  il existe un automorphisme  $f$  de  $E$  tel que  $f(e) = e'$ .

**EXEMPLE 10.2.** Les revêtements à deux feuillet de  $S^1 \vee S^1$  que nous avons rencontrés dans les exercices sont des revêtements galoisiens :



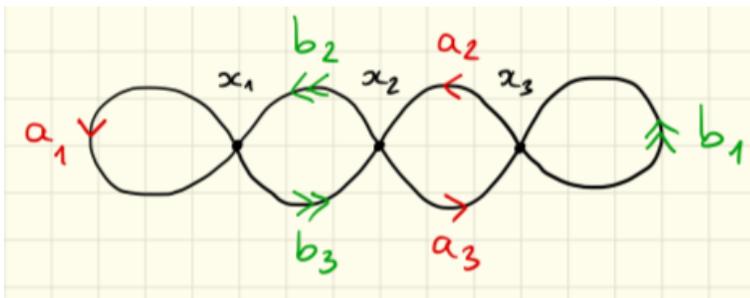
La nature symétrique de ces espaces permet en effet de reconnaître dans les deux cas qu'une rotation de  $\pi$  radians est un automorphisme (compatible avec la projection). Du point de vue de l'image du groupe fondamental dans le groupe libre  $F(a, b)$  à deux générateurs nous verrons tout-à-l'heure que ceci correspond au fait qu'il s'agit d'un sous-groupe d'indice deux, et donc *normal*.

EXEMPLE 10.3. Le collier de perles, revêtement à une infinité de feuillets du bouquet de deux cercles est aussi galoisien :



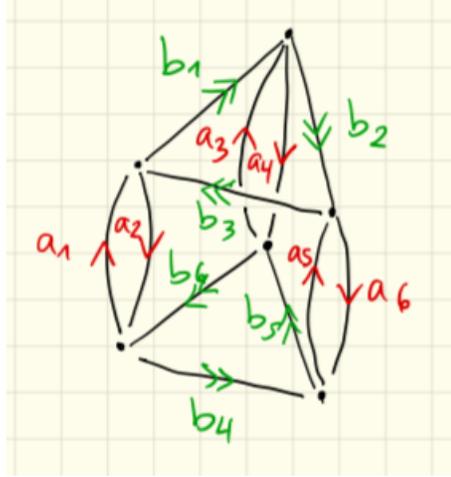
Ici les translations horizontales sont des automorphismes de revêtements.

EXEMPLE 10.4. Il y a de nombreux revêtements non galoisiens de  $S^1 \vee S^1$ , par exemple :



On voit que le seul automorphisme est l'identité car la compatibilité avec la projection implique qu'un automorphisme doit permuter non seulement les points de la fibre  $x_i$ , mais aussi les  $a_i$  et les  $b_i$ . La symétrie axiale d'axe horizontale ne convient pas non plus car elle inverse le sens des flèches... Du point de vue des groupes, on constate que l'image du groupe fondamental du revêtement, qui est engendré par les lacets  $a_1, b_3 b_2, b_3 a_3 a_2 \bar{b}_3, b_3 a_3 b_1 \bar{a}_3 \bar{b}_3$  a pour image dans  $F(a, b)$  le sous-groupe d'indice 3 donné par les générateurs  $a, b^2, ba^2b^{-1}$  et  $baba^{-1}b^{-1}$ .

EXEMPLE 10.5. On termine avec un dernier revêtement  $E \rightarrow S^1 \vee S^1$ , pour le plaisir de retrouver le groupe symétrique  $S_3$  :



J'ai dessiné le graphe de Cayley de sorte qu'il soit clair que deux générateurs suffisent à engendrer  $S_3$  si bien que  $S_3$  est un quotient de  $F(a, b)$  (par le sous-groupe normal dont l'image est induite au niveau des groupes fondamentaux par le revêtement), mais surtout pour mieux voir que ce revêtement est galoisien. En effet la rotation de  $2\pi/3$  permute cycliquement les trois sommets de chacune des bases du prisme et la rotation d'angle  $\pi$  dont l'axe passe par le milieu des arêtes  $a_3$  et  $a_4$  et le milieu de la face verticale située entre  $b_3$  et  $b_4$  transpose les sommets supérieurs et inférieurs.

Ce revêtement est galoisien et l'image dans  $F(a, b)$  de  $\pi_1 E$  est engendrée par  $a^2, b^3$  et  $abab$ .

**PROPOSITION 10.6.** *Un revêtement  $p: E \rightarrow X$  est galoisien si et seulement si  $p_*(\pi_1 E)$  est un sous-groupe normal de  $\pi_1 X$ .*

**DÉMONSTRATION.** Nous avons vu dans la Proposition 7.5 que deux revêtements sont isomorphes si et seulement si les images de leur groupe fondamental respectif sont conjuguées. Si un automorphisme  $f: (E, e) \rightarrow (E, e')$  est pointé (et envoie  $e$  sur  $e'$ ), alors les images sont égales (car  $p = p \circ f$ ).

Ainsi, si  $p$  est galoisien, tous les conjugués  $p_*(\pi_1(E; e))$  où  $e$  parcourt la fibre  $p^{-1}(x_0)$  sont égaux, si bien que ce sous-groupe est normal. Réciproquement, si ce sous-groupe est normal on tire de la propriété de relèvement Proposition 5.1 qu'un automorphisme  $f$  comme ci-dessus existe pour tout choix  $e, e' \in p^{-1}(x_0)$  puisque  $p_*(\pi_1(E; e')) \subset p_*(\pi_1(E; e))$  (ils sont même égaux).  $\square$

On arrive finalement au deuxième Théorème de Correspondance galoisienne.

**THÉOREME 10.7.** *Soit  $p: E \rightarrow X$  un revêtement galoisien. Alors on a un isomorphisme de groupes  $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X; x_0)/p_*(\pi_1(E; e_0))$ , pour tout choix de points de base  $x_0 \in X$  et  $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Nous avons établi un isomorphisme dans la Proposition 9.2 entre les automorphismes de  $p$  et les bijections équivariantes de la fibre. Nous construisons maintenant une telle bijection équivariante  $B[\omega]$  pour tout lacet  $[\omega]$  dans la base en le faisant agir par monodromie sur le point de base de la fibre choisi :  $B[\omega](e_0) = e_0 \cdot [\omega]$  et pour tout  $e \in p^{-1}(x_0)$  il existe par transitivité de la monodromie, Proposition 7.3, un lacet  $[\alpha] \in \pi_1(X; x_0)$  tel que  $e_0 \cdot [\alpha] = e$ . Ce lacet n'est pas unique, mais il est bien défini modulo  $p_*(\pi_1(E; e_0))$ , le stabilisateur. On pose alors

$$B[\omega](e) = e_0 \cdot [\omega \star \alpha]$$

L'équivariance provient du fait que la monodromie est bien une action, Remarque 7.2. En effet, pour tout  $[\omega'] \in \pi_1(X; x_0)$  on observe que le lacet  $[\alpha \star \omega']$  agit par monodromie sur  $e_0$  comme  $[\omega']$  agit sur  $e_0 \cdot [\alpha] = e$ . Ainsi

$$B[\omega](e \cdot [\omega']) = e_0 \cdot [\omega \star \alpha \star \omega'] = e_0 \cdot [\omega \star \alpha] \cdot [\omega'] = B[\omega](e) \cdot [\omega']$$

La monodromie définit de fait un homomorphisme de groupe  $B$  de  $\pi_1(X; x_0)$  vers les bijections équivariantes de la fibre  $p^{-1}(x_0)$  puisque par la Remarque 7.2 encore une fois :

$$B([\omega][\omega'])(e_0) = e_0 \cdot [\omega \star \omega'] = (e_0 \cdot [\omega]) \cdot [\omega'] = B[\omega'](B[\omega](e_0))$$

Le produit des lacets dans le groupe fondamental correspond donc bien à la composition des bijections. Calculons le noyau de cet homomorphisme. Une classe  $[\omega]$  fixe tous les points de la fibre si et seulement il se relève en un lacet basé en  $e$ , ce qui arrive si et seulement si  $[\omega] \in p_*(\pi_1(E; e))$ , pour tout  $e \in p^{-1}(x_0)$ . Comme le revêtement est galoisien, la Proposition 10.6 montre que l'image par  $p_*$  est un sous-groupe normal (le même pour tout choix de point de base dans la fibre).

Il reste à montrer la surjectivité de l'homomorphisme que  $B$  induit sur le quotient  $\pi_1(X; x_0)/p_*(\pi_1(E; e_0))$ . Soit  $\phi$  une bijection  $\pi_1(X; x_0)$ -équivariante de la fibre et  $e_0$

un point de  $p^{-1}(x_0)$ . Par transitivité de la monodromie, Proposition 7.3, il existe  $[\omega] \in \pi_1(X; x_0)$  tel que  $\phi(e_0) = e_0 \cdot [\omega]$ . Alors  $\phi$  et  $B[\omega]$  coïncident sur  $e_0$ , ce sont donc des bijections égales par équivariance.  $\square$

EXEMPLE 10.8. Le revêtement à six feuillets construit dans l'Exemple 10.5 est galoisien et correspond à une action du groupe symétrique  $S_3$  sur l'espace total. Ce groupe d'automorphismes est identifié au quotient  $\langle a, b \mid a^2, b^3, abab \rangle$ .

### 11. Revêtements et action de groupes

Pour terminer le cours et bien comprendre la correspondance galoisienne pour les revêtements, nous expliquons comment les revêtements galoisiens se voient du point de vue de l'action d'un groupe (abstrait ou d'automorphismes de revêtements). Encore une fois tous les espaces sont connexes par arcs et localement connexes par arcs. Nous commençons par montrer que tout revêtement galoisien est obtenu comme un quotient par une action de groupe (totalement discontinue).

PROPOSITION 11.1. *Si  $p: E \rightarrow X$  est un revêtement galoisien, alors  $X$  est homéomorphe à  $E/\text{Aut}(p)$ .*

DÉMONSTRATION. Appelons  $q$  l'application quotient  $E \rightarrow E/\text{Aut}(p)$ . Par la propriété universelle du quotient, on obtient de  $p$  une application induite  $\bar{p}: E/\text{Aut}(p) \rightarrow X$  puisque  $p(f(e)) = p(e)$  pour tout  $e \in E$  et tout automorphisme  $f$  par définition de ce qu'est un morphisme de revêtement. On a donc  $\bar{p} \circ q = p$ .

Pour construire l'inverse on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & E/\text{Aut}(p) \\ \downarrow p & \nearrow \bar{q} & \\ X & & \end{array}$$

Pour  $x \in X$  et  $e \in p^{-1}(x)$  un élément dans la fibre au-dessus de  $x$ , on pose  $\bar{q}(x) = q(e)$ . On vérifie d'abord que cette formule définit bien une application ensembliste. Si  $e'$  est un autre point de la fibre, la transitivité de l'action de  $\text{Aut}(p)$  (le revêtement est galoisien) garantit l'existence d'un automorphisme  $f$  tel que  $f(e) = e'$ . Ainsi  $q(e') = q(f(e)) = q(e)$  par définition du quotient dans lequel on identifie les orbites sous l'action du groupe d'automorphismes. On a alors  $\bar{q} \circ p = q$ .

Nous devons encore montrer que  $\bar{q}$  est continue et pour cela on étudie la préimage d'un ouvert  $U \subset E/\text{Aut}(p)$ . Comme  $q$  est continue  $q^{-1}(U)$  est un ouvert de  $E$  et par surjectivité de  $p$  (qui est un revêtement), on a  $\bar{q}^{-1}(U) = p[q^{-1}(U)]$ . Or, tout revêtement est ouvert, et on conclut que  $\bar{q}^{-1}(U)$  est ouvert.

Pour terminer la preuve nous montrons que  $\bar{q}$  et  $\bar{p}$  sont inverses l'un de l'autre. Soit  $x \in X$ . Alors,

$$\bar{p}(\bar{q}(x)) = \bar{p}(q(e)) = p(e) = x \quad \text{et} \quad \bar{q}(\bar{p}(e\text{Aut}(p))) = \bar{q}(p(e)) = q(e) = e\text{Aut}(p)$$

avec les notations comme ci-dessus. □

Nous continuons avec une sorte de réciproque qui nous permet de construire des revêtements galoisiens comme des quotients qui ne sont pas arbitraires, mais donnés par une (jolie) action de groupe.

**PROPOSITION 11.2.** *Soit  $G$  un groupe qui agit de manière totalement discontinue sur un espace  $E$ . Alors l'application quotient  $q: E \rightarrow E/G$  est un revêtement galoisien et  $\text{Aut}(q) \cong G$ .*

**DÉMONSTRATION.** On sait déjà qu'une action totalement discontinue définit un revêtement. Identifions maintenant le groupe des automorphismes. Clairement  $G$  s'identifie à un sous-groupe de  $\tilde{G} = \text{Aut}(q)$  via  $g \mapsto f_g$ , l'automorphisme défini par  $f_g(e) = e \cdot g$ . C'est un automorphisme compatible avec  $q$  puisque  $q(e) = q(e \cdot g)$  par définition du quotient.

Soit  $f \in \text{Aut}(q)$  et  $e \in E$ . Alors  $f(e)$  est un point dans la fibre au-dessus de  $\bar{e}$ . Comme  $G$  agit transitivement sur l'orbite  $e \cdot G = q^{-1}(\bar{e})$ , il existe  $g \in G$  tel que  $e \cdot g = f(e)$ , si bien que  $f$  et la multiplication par  $g$  sont deux relèvements de l'identité qui coïncident sur le point  $e$ . Comme  $E$  est connexe, le principe du "tout ou rien" s'applique et on conclut que  $f = f_g$ . Par conséquent  $G \cong \tilde{G}$ .

En particulier l'action de ce dernier groupe est transitive sur les fibres et  $q$  est galoisien (par définition). □

Cette proposition a une conséquence particulièrement importante pour le calcul des groupes fondamentaux.

**COROLLAIRE 11.3.** *Soit  $G$  un groupe qui agit de manière totalement discontinue sur un espace  $E$  simplement connexe. Alors  $\pi_1(E/G) \cong G$ .*

**DÉMONSTRATION.** On sait que le revêtement  $q: E \rightarrow E/G$  est galoisien par la Proposition 11.2 et  $\text{Aut}(q) \cong G$ . Or, par hypothèse,  $E$  est simplement connexe et on conclut alors que le groupe  $\tilde{G}$  des automorphismes de  $q$  s'identifie au quotient du groupe fondamental de la base par l'image de celui de l'espace total :  $\pi_1(E/G)/q_*(\pi_1 E) = \pi_1(E/G)/1 \cong \pi_1(E/G)$ .  $\square$

Ces clarifications nous permettent enfin de revister la correspondance galoisienne et de comprendre comment dans la pratique on construit les revêtements intermédiaires entre  $\tilde{X}$  et  $X$ . On suppose dès maintenant que  $X$  est aussi semi-localement simplement connexe de sorte que le revêtement universel  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  existe. Via l'isomorphisme  $\text{Aut}(p) = \tilde{G} \cong G = \pi_1 X$ , on note  $\tilde{H}$  le sous-groupe de  $\tilde{G}$  qui correspond à  $H < G$ .

**THÉORÈME 11.4.** *Soit  $H < G = \pi_1 X$ . Alors le sous- revêtement  $X_H$  peut s'obtenir comme quotient  $\tilde{X}/\tilde{H}$  et  $p_H: X_H \rightarrow X$  est alors le revêtement donné par la formule  $p_H(e\tilde{H}) = e\tilde{G}$ .*

**DÉMONSTRATION.** La Proposition 11.2 nous apprend que  $q_H: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\tilde{H}$  est un revêtement galoisien et  $\pi_1(\tilde{X}/\tilde{H}) \cong \tilde{H} \cong H$  par le corollaire.

De plus  $p_H$  est l'application induite sur le quotient par la projection du revêtement universel  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ .  $\square$

Ce Théorème semble n'être qu'une suite de tautologies, mais il donne en fait une construction bien plus explicite que la méthode abstraite décrite dans les exercices et basée sur la description du revêtement universel comme espace de classes d'homotopie relatives de chemins. En particulier nous apprenons que le revêtement universel de  $X$  est aussi celui de  $X_H$  : c'est un espace simplement connexe sur lequel le "grand" groupe  $G = \pi_1 X$  agit totalement discontinuement, mais on peut aussi y faire agir un "petit" groupe  $H < G$ . Ainsi, tous les revêtements du bouquet de deux cercles sont des quotients du graphe de Cayley de  $F(a, b)$  ! Ceux qui correspondent à des actions de sous-groupes normaux sont plus symétriques et produisent des revêtements galoisiens de  $S^1 \vee S^1$ .



## Un coup d'oeil en avant

J'aimerais rapidement donner quelques directions possibles qui généralisent ou étendent les constructions et les méthodes que nous avons étudiées ensemble ce semestre. On commence par les groupes d'homotopie supérieurs.

### 1. Les groupes d'homotopie supérieurs

DÉFINITION 1.1. Soit  $(X, x_0)$  un espace pointé et  $(S^n, e_1)$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$  basée en  $e_1 = (1; 0; \dots; 0)$ . Le  $n$ -ème groupe d'homotopie  $\pi_n(X; x_0)$ , parfois simplement noté  $\pi_n X$  est le groupe des classes d'homotopie pointées  $[(S^n, e_1), (X, x_0)]$ .

La structure de groupe vient du fait que  $S^n \approx \Sigma S^{n-1}$  et on peut “pincer” une  $n$ -sphère le long de l'équateur pour obtenir une application  $S^n \rightarrow S^n \vee S^n$  qui permet de construire un produit. De manière équivalente on peut aussi voir  $S^n \approx S^1 \wedge S^{n-1}$  et utiliser le pinch sur le cercle, qu'on smashe avec  $S^{n-1}$ .

PROPOSITION 1.2. Soit  $n \geq 2$ . Alors  $\pi_n X$  est un groupe abélien.

On peut dessiner l'homotopie entre  $ab$  et  $ba$ , ou utiliser le truc de Eckmann-Hilton pour deux lois de composition, l'une définie en utilisant la première copie de  $S^1$  dans  $S^1 \wedge S^{n-1}$  et l'autre en utilisant la dernière dans  $S^{n-1} \wedge S^1$ . Un autre point de vue est encore donné par le fait que les lacets de  $X$  forment un espace (topologique), appelé *espace de lacets* et noté  $\Omega X = \text{map}_*(S^1, X)$ . L'ensemble de toutes les applications (continues, et ici pointées) est muni d'une topologie, la topologie compacte-ouverte.

DÉFINITION 1.3. Soient  $X, Y$  deux espaces. Pour  $K$  compact dans  $X$  et  $U$  ouvert de  $Y$ , on définit  $V(K, U)$  comme étant constitué des applications continues  $f: X \rightarrow Y$  telles que  $f(K) \subset U$ . La *topologie compacte-ouverte* sur  $\mathcal{C}(X, Y)$  a pour ouverts toutes les réunions arbitraires d'intersection finies de  $V(K, U)$ . On note  $\text{map}(X, Y)$  l'espace des applications continues de  $X$  vers  $Y$ .

Autrement dit les  $V(K, U)$  forment une prébase de la topologie compacte-ouverte. Cette topologie rend la composition d'applications et l'évaluation continues. Elle a aussi le bon goût de faire en sorte que  $\text{map}(*, X) \approx X$ . La loi exponentielle est moins tautologique que ce qu'on souhaiterait, mais si on se restreint à des espaces convenables (Hausdorff et localement compacts), alors on a un homéomorphisme

$$\text{map}(X \times Y, Z) \approx \text{map}(X, \text{map}(Y, Z))$$

D'un point de vue ensembliste on se convainc facilement qu'étant donné une application (continue)  $X \times Y \rightarrow Z$ , on forme une application  $f_x: Y \rightarrow Z$  par  $f_x(y) = f(x, y)$ , qui définit une application (continue)  $X \rightarrow \text{map}(Y, Z)$ .

Dans le cas pointé cette *adjonction* entre, à gauche,  $X \mapsto X \times Y$  et, à droite,  $Z \mapsto \text{map}(Y, Z)$  fait intervenir l'analogue pointé du produit, i.e. le produit smash :

$$\text{map}_*(X \wedge Y, Z) \approx \text{map}_*(X, \text{map}_*(Y, Z))$$

En particulier, lorsque  $X = Y = S^1$  on obtient  $\text{map}_*(S^2, Z) \approx \text{map}_*(S^1, \Omega Z)$ . Il y a deux manières de définir une loi de composition ici. Sur la source grâce au pinch, ou sur le but, via la concaténation de lacets. Ces deux lois passent au quotient et munissent  $\pi_0 \text{map}_*(S^2, Z) \cong [S^2, Z] = \pi_2 Z$  de deux structures de groupe. En fait elles coïncident et sont commutatives.

## 2. Les fibrations

Revenons un moment aux revêtements, et plus particulièrement au revêtement universel. Notons  $G \hookrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{p} X$  pour nous souvenir que toutes les fibres de  $p$  sont en bijection avec  $G = \pi_1 X$ . Les bonnes propriétés de ce revêtement ne s'arrêtent pas là où nous les avons laissées. La nature discrète des fibres et le fait qu'on a construit  $\tilde{X}$  de sorte que  $\pi_1 \tilde{X} = 1$ , fait non seulement que  $\pi_1 X$  est isomorphe à  $G$ , mais  $\pi_n X \cong \pi_n \tilde{X}$  pour tout  $n \geq 2$ . Remarquons en particulier que ceci implique que  $\pi_n S^1 = 0$  pour tout  $n \geq 2$  car le revêtement universel est non seulement simplement connexe, mais contractile.

Il existe d'autres applications qui partagent ce type de propriétés avec les revêtements, ce sont les fibrés ou de manière plus générale, les fibrations. La définition fait intervenir des propriétés de relèvement d'homotopie dans l'esprit de ce que

nous avons établi pour les revêtements, et les actions de groupes topologiques en donnent des exemples que nous avons déjà rencontrés, comme l'application de Hopf  $\eta: S^3 \rightarrow S^2$  qu'on pourra alors écrire  $S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{\eta} S^2$ . La remarque faite sur les groupes d'homotopie supérieurs du cercle fait que  $\pi_n S^3 \cong \pi_n S^2$  pour tout  $n \geq 3$ , mais  $\pi_2 S^3 = 0$  alors que  $\pi_2 S^2 \cong \mathbb{Z}$ , le générateur étant l'identité, de degré un.

**THÉORÈME 2.1.** *Il existe une fibration  $X\langle n \rangle \rightarrow X \rightarrow X[n]$  où  $X\langle n \rangle$  est le revêtement  $n$ -connexe de  $X$  et  $X[n]$  la  $n$ -ème section de Postnikov de  $X$ , i.e.  $\pi_k X\langle n \rangle = 0$  pour  $k \leq n$  et  $\pi_k X[n] = 0$  pour  $k > n$ .*

Ceci implique aussi que les groupes d'homotopie non triviaux de  $X\langle n \rangle$  et de  $X[n]$  coïncident avec ceux de  $X$ . Quand  $n = 1$  on a  $X\langle 1 \rangle = \tilde{X}$  et  $X[1] = K(G, 1)$  un espace connexe par arcs dont le seul groupe d'homotopie non trivial est le premier, isomorphe à  $G = \pi_1 X$ .

Entre le moment de la définition des groupes d'homotopie par Cech dans les années 30 et les années 60, de nombreux travaux ont permis une meilleure compréhension de la nature de ces invariants homotopiques. Les résultats spectaculaires de Serre dans les années 50 montrent que tous ces groupes sont finis, sauf  $\pi_n S^n \cong \mathbb{Z}$  et  $\pi_{4n-1} S^{2n}$  (comme c'est le cas de  $\pi_3 S^2 \cong \pi_3 S^3 \cong \mathbb{Z}$ ), et que pour tout premier  $p$  il existe de la  $p$ -torsion dans  $\pi_* S^n$ , il calcule même la dimension de la première occurrence de  $\mathbb{Z}/p$ , qui se trouve dans  $\pi_{n+2p-3} S^n$  pour tout  $n \geq 3$ .

On trouvera sur la page suivante un tableau de ce qui est connu en petites dimensions (Wikipedia). Les escaliers noirs et les couleurs suggèrent les propriétés de *stabilité*, et la forme plus complexe des groupes d'homotopie au-dessus de ce rang stable montre la difficulté et laisse peut-être entrevoir l'impossibilité d'un calcul complet.

	$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$	$\pi_9$	$\pi_{10}$	$\pi_{11}$	$\pi_{12}$	$\pi_{13}$	$\pi_{14}$	$\pi_{15}$
$S^0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S^1$	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S^2$	0	z	z	$z_2$	$z_2$	$z_{12}$	$z_2$	$z_2$	$z_3$	$z_{15}$	$z_2$	$z_2^2$	$z_{12} \times z_2$	$z_{84} \times z_2^2$	$z_2^2$
$S^3$	0	0	z	$z_2$	$z_2$	$z_{12}$	$z_2$	$z_2$	$z_3$	$z_{15}$	$z_2$	$z_2^2$	$z_{12} \times z_2$	$z_{84} \times z_2^2$	$z_2^2$
$S^4$	0	0	0	z	$z_2$	$z_2$	$z \times z_{12}$	$z_2^2$	$z_2^2$	$z_{24} \times z_3$	$z_{15}$	$z_2$	$z_2^3$	$z_{120} \times z_{12} \times z_2$	$z_{84} \times z_2^5$
$S^5$	0	0	0	0	z	$z_2$	$z_2$	$z_{24}$	$z_2$	$z_2$	$z_2$	$z_{30}$	$z_2$	$z_2^3$	$z_{72} \times z_2$
$S^6$	0	0	0	0	0	z	$z_2$	$z_2$	$z_{24}$	0	z	$z_2$	$z_{60}$	$z_{24} \times z_2$	$z_2^3$
$S^7$	0	0	0	0	0	0	z	$z_2$	$z_2$	$z_{24}$	0	0	$z_2$	$z_{120}$	$z_2^3$
$S^8$	0	0	0	0	0	0	0	z	$z_2$	$z_2$	$z_{24}$	0	0	$z_2$	$z \times z_{120}$

### 3. L'invariant de Hopf

Mentionnons encore le fameux Théorème de l'invariant de Hopf, dû à Adams vers 1960. Les groupes d'homotopie des sphères sont équipés d'un produit gradué, appelé *produit de Whitehead*. De même que le tore  $S^1 \times S^1$  se décompose en  $S^1 \vee S^1 \cup e^2$ , en général on a une décomposition cellulaire de  $S^n \times S^m$  en  $S^n \vee S^m \cup e^{n+m}$ . L'application d'attachement est le produit de Whitehead

$$[\iota_n, \iota_m]: S^{n+m-1} \rightarrow S^n \vee S^m$$

qu'on écrit comme un commutateur par analogie avec le cas connu  $n = m = 1$ . Pour deux applications (pointées)  $\alpha: S^n \rightarrow X$  et  $\beta: S^m \rightarrow X$ , on peut alors construire

$$[\alpha, \beta]: S^{n+m-1} \rightarrow S^n \vee S^m \xrightarrow{\alpha \vee \beta} X \vee X \xrightarrow{\nabla} X$$

et utiliser ces "commutateurs" pour définir une notion de nilpotence homotopique... Par exemple  $[id_{S^2}, id_{S^2}] = 2\eta$  où  $\eta$  est l'application de Hopf, générateur de  $\pi_3 S^2$ . En général on peut construire  $[id_{S^n}, id_{S^n}] \in \pi_{2n-1} S^n$ . Ceci n'est que l'ombre du problème de l'invariant de Hopf, pour lequel il faudrait introduire les invariants de cohomologie, mais c'est peut-être et malgré tout frappant de savoir que ces crochets de Whitehead ont un invariant égal à deux et que les seuls groupes d'homotopie  $\pi_{2n-1} S^n$  où une application de Hopf d'invariant 1 existe sont  $\pi_3 S^2, \pi_7 S^4$  et  $\pi_{15} S^8$ .

Si on ajoute encore  $S^1$  pour laquelle l'invariant de Hopf n'est pas défini, les dimensions de ces sphères sont exactement celles des  $\mathbb{R}$ -algèbres non nécessairement associatives  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  et  $\mathbb{O}$ . On peut associer à ces algèbres des plans projectifs  $\mathbb{R}P^2, \mathbb{C}P^2, \mathbb{H}P^2$  et  $\mathbb{O}P^2$  dont la décomposition cellulaire est précisément  $S^n \cup e^{2n}$  et l'application d'attachement a pour invariant de Hopf 1. De plus :

**THÉORÈME 3.1.** *Les sphères  $S^0, S^1, S^3, S^7$  sont les seules qui admettent une structure de  $H$ -espace.*

On a une structure de groupe discret fini sur  $S^0$ , de groupe topologique commutatif pour  $S^1$ , non commutatif pour  $S^3$  et finalement non associatif pour  $S^7$ ...