EPFL - Semestre de Printemps 2021-2022	Jérôme Scherer
Topologie	**Examen final**
Mathématiques	le 25 juin 2022
Durée : 180 minutes	Nombre de points : 68

Nom		Prénom	
Signature		Sciper	

Nous demandons à chaque exercice des justifications et des explications claires et précises. Il est permis de citer un résultat du cours ou l'un des exercices théoriques des séries à condition que le sujet du problème d'examen ne soit pas justement le contenu de ce résultat ou exercice, et que l'énoncé du résultat soit donné explicitement et complètement.
Les pages 15 et 16 sont à disposition pour terminer un exercice si nécessaire, mais en général la place prévue devrait suffire.

Espace réservé pour la correction.

Ex. 1 (5 pts)		Ex. 2 (10 pts)		Ex. 3 (16 pts)	
Ex. 4 (10 pts)		Ex. 5 (8 pts)		Ex. 6 (19 pts)	
Total (68 pts)		**Note**			

Question 1, la topologie quotient. (5 points) Soit $p\colon X \to Y$ une application continue et surjective. On rappelle qu'un ouvert $O \subset X$ est dit saturé si $p^{-1}(p(O)) = O$. Montrer que l'image de tout ouvert saturé de X est ouvert dans Y si et seulement si p est une application quotient (i.e. la topologie de Y est la topologie quotient définie par p).

Question 2, Deux applications. (10 points)

(a) (4 pts) Soit S^1 le cercle unité dans le plan complexe. On définit $f\colon S^1 \to S^1$ par $f(e^{it}) = 1$ pour tout $0 \leq t \leq \pi$ et $f(e^{it}) = e^{2i(t-\pi)}$ pour $\pi < t \leq 2\pi$. Montrer que cette application est bien définie, continue et homotope à l'identité comme application pointée, $1 \in S^1$ étant le point de base. On demande une homotopie explicite.

(b) (6 pts) Soit $S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ la sphère unité dont un point sera noté $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. On définit pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}$ une application $f\colon S^2 \to S^2$ par $f(z, x) = (z^n, x)$. Soit $q\colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ le quotient par la relation antipodale. Déterminer pour quel entier n l'application f passe au quotient pour définir une application $\bar{f}\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$. Calculer $\bar{f}_*\colon \pi_1\mathbb{R}P^2 \to \pi_1\mathbb{R}P^2$ dans ce cas, par exemple en calculant l'image d'un générateur explicite de $\pi_1\mathbb{R}P^2$.

Question 3, un espace quotient. (16 points) Soit p un nombre premier. On considère un carré $C = [0;1] \times [0;1]$ (muni de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}^2$) et l'espace quotient $X = C/\sim$ obtenu en identifiant $(s;0) \sim (s;1)$ et $(1;t) \sim (0; p \cdot t - [p \cdot t])$ où $[x]$ indique la partie entière du nombre réel x. On appelle $q\colon C \to X$ l'application quotient.

(a) (3 pt) Montrer que X est un espace compact et de Hausdorff.

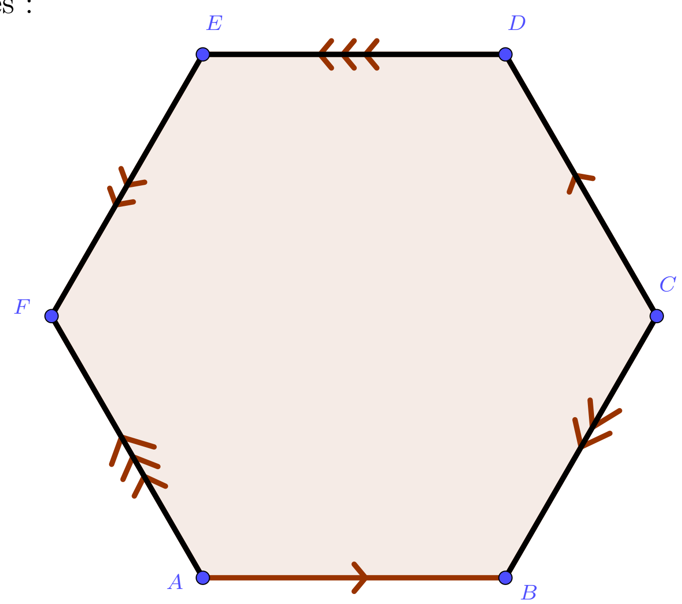
(b) (3 pts) Soit $\partial C \subset C$ le bord du carré. Construire (et justifier !) un homéomorphisme de $q(\partial C)$ vers un wedge de deux cercles $S^1_a \vee S^1_b$.

(c) (4 pts) Montrer que X est homéomorphe à un espace obtenu de $S^1_a \vee S^1_b$ en attachant une 2-cellule e^2. Identifier l'application d'attachement $f\colon S^1 \to S^1_a \vee S^1_b$ et sa classe d'homotopie dans $\pi_1(S^1_a \vee S^1_b)$.

(d) (4 pts) Montrer que le groupe fondamental de X est isomorphe au groupe $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-p} \rangle$.

(e) (2 pts) Montrer que G contient un sous-groupe normal N isomorphe à $\mathbb{Z}$ et que le quotient G/N est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (c'est en fait un produit semi-direct).

Question 4, une surface. (10 points) On donne la présentation polygonale suivante qui définit une surface S par identification des six côtés d'un hexagone, deux à deux dans le sens indiqué par les flèches :



(a) (4 pts) Effectuer des découpages et des recollements pour identifier cette surface avec la somme connexe d'un plan projectif et d'un tore. On ne demande pas des homéomorphismes explicites, mais des explications qui accompagnent les illustrations. On pourra commencer par exemple par un découpage le long du segment $[BE]$.

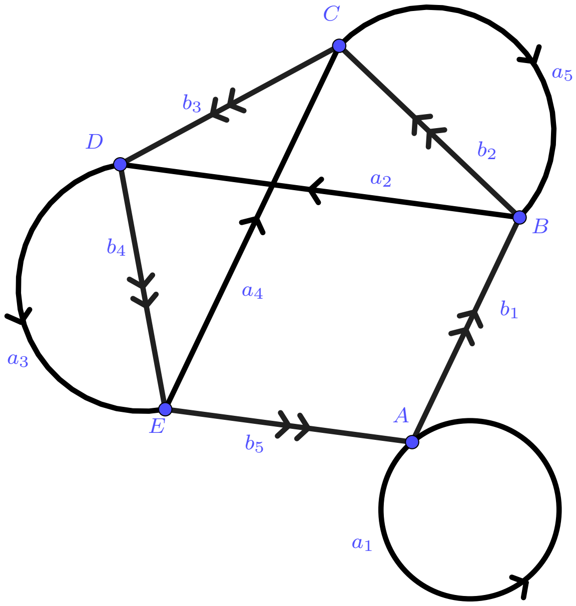
(b) (1 pts) Identifier cette surface sous sa forme donnée dans le Théorème de classification. Aucun découpage n'est demandé, on pourra se baser sur la théorie vue en cours.

(c) (1 pts) Donner le groupe fondamental de S sous sa forme correspondant à la présentation polygonale du point (b).

(d) (4 pts) Identifier l'abélianisé A de $\pi_1 S$. On demande donc de donner un groupe abélien A de type fini et de construire un isomorphisme $(\pi_1 S)_{ab} \to A$. On demande de prouver la surjectivité, l'injectivité de cet homomorphisme n'est pas demandée.

Question 5, Une démonstration. (8 points) Soit G un groupe discret qui agit de manière totalement discontinue sur un espace X connexe par arcs et localement connexe par arcs. Montrer que l'espace quotient X/G est connexe par arcs, localement connexe par arcs et que l'application quotient $q\colon X \to X/G$ est un revêtement.

Question 6, un revêtement. (19 points) Considérons l'espace Y obtenu à partir du bord Z d'un hexagone $ABCDE$ en attachant un cercle en A et quatre arêtes comme ceci (le dessin est une projection, les segments $[BD]$ et $[CE]$ ne se coupent pas !) :



Autrement dit Y est obtenu à partir de Z en attachant cinq 1-cellules. On appelle b_1 le chemin parcouru sur le segment $[AB]$ de A vers B, b_2 le chemin analogue sur $[BC]$, puis b_3, b_4 et enfin b_5 sur $[EA]$. On appelle a_1 le lacet basé en A parcouru sur le cercle dans le sens indiqué par la flèche simple, a_2 le chemin parcouru sur $[BD]$, a_3 le chemin parcouru sur le demi-cercle de D vers E, a_4 sur le segment $[EC]$ et enfin a_5 le chemin parcouru sur le demi-cercle de C vers D.

(a) (4 pts) Considérons le sous-espace W de Y constitué de Z, du cercle passant par A et du segment $[BD]$. Montrer que W est homotope à un wedge de trois cercles et identifier trois lacets basés en A construits comme concaténation de chemins a_i et b_j qui engendrent $\pi_1(W; A)$.

(b) (4 pts) Identifier le type d'homotopie de Y et calculer son groupe fondamental $G = \pi_1(Y; A)$ en identifiant les générateurs explicitement comme concaténation de chemins (mais aucune justification n'est demandée).

(c) (2 pts) On appelle à partir d'ici $q\colon Y \to Y/\mathcal{S}$ l'application quotient où $\mathcal{S}$ est la relation d'équivalence indiquée par les flèches qui décorent les arêtes. Montrer que q est un revêtement.

(d) (2 pts) On appelle a le lacet de $Y/\mathcal{S}$ donné par l'image du chemin a_1 et b celui donné par l'image de b_1. Calculer l'image du groupe fondamental $H = q_*(G)$ dans $F = \pi_1(Y/\mathcal{S}; q(A))$.

(e) (3 pts) Calculer l'effet de l'action de monodromie de α^n et β^m sur A pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ où $\alpha = [a], \beta = [b] \in F$.

(f) (2 pts) Calculer l'indice de H dans F, i.e. le nombre de classes wH pour $w \in F$.

(g) (2 pts) Déterminer si le revêtement q est galoisien.